BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 96–100

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 96

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $13 \cdot 11 = \boxed{143}$
2. Cifra sutelor numărului natural 375 este egală cu $\boxed{3}$.
3. Opusul numărului $-4,5$ este numărul $\boxed{4,5}$.
4. Din $\frac{a}{5} = \frac{b}{6}$ avem $6a = 5b$, deci $6a - 5b = \boxed{0}$.
5. Inecuaţia $x + 3 \leq 3$ este echivalentă cu $x \leq 3 - 3$ sau cu $x \leq 0$ sau cu $x \in (-\infty, 0]$. Singurul număr natural din acest interval este $x = \boxed{0}$.
6. Triunghiul fiind dreptunghic în $\hat{A}$, aria sa este egală cu jumătate din produsul catetelor, adică $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = \boxed{36}\ cm^2$.
7. Cubul are toate muchiile egale, deci $BC + C'D' = 5 + 5 = \boxed{10}\ cm$.
8. $A_l = \pi \cdot g(R + r) = \pi \cdot 7 \cdot 10 = \boxed{70}\pi\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Din $1 + 2 + 3 = \frac{a(a+1)}{2}$ avem $a(a + 1) = 2(1 + 2 + 3)$, ceea ce este echivalent cu $a^2 + a - 12 = 0$. Discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi este $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$, iar rădăcinile $a_1 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3} \in \mathbb{N}$ şi $a_2 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \notin \mathbb{N}$.
10. $\boxed{C}$: Avem de rezolvat sistemul:

$$\begin{cases} x + y &= 5 \quad (1) \\ -2x + y &= -4 \quad (2) \end{cases}$$

Scăzând din ecuaţia (2) ecuaţia (1) obţinem $3x = 9$, de unde $x = \frac{9}{3} = 3$. Înlocuind $x = 3$ în ecuatia (1) avem $3 + y = 5$, de unde $y = 5 - 3 = 2$.

11. $\boxed{A}$: Suma ariilor dreptunghiurilor, adică 25, este aria pătratului. Atunci latura AB a pătratului este $\sqrt{25} = 5$.
12. $\boxed{C}$: Un triunghi echilateral are 3 axe de simetrie.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $A = \boxed{\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$

b. Pentru ca A să conţină exact 20 de elemente divizibile cu 3, trebuie ca a să fie cel puţin $3 \cdot 21$ şi cel mult $3 \cdot 22 - 1$. Deci valorile posibile ale lui a sunt $\boxed{63, 64, 65}$.

14. a. $f(2) - 2 \cdot g(3) = (2 \cdot 2 - 2) - 2 \cdot (0,5 \cdot 3 + 1) = 2 - 2 \cdot 2,5 = \boxed{-3}$

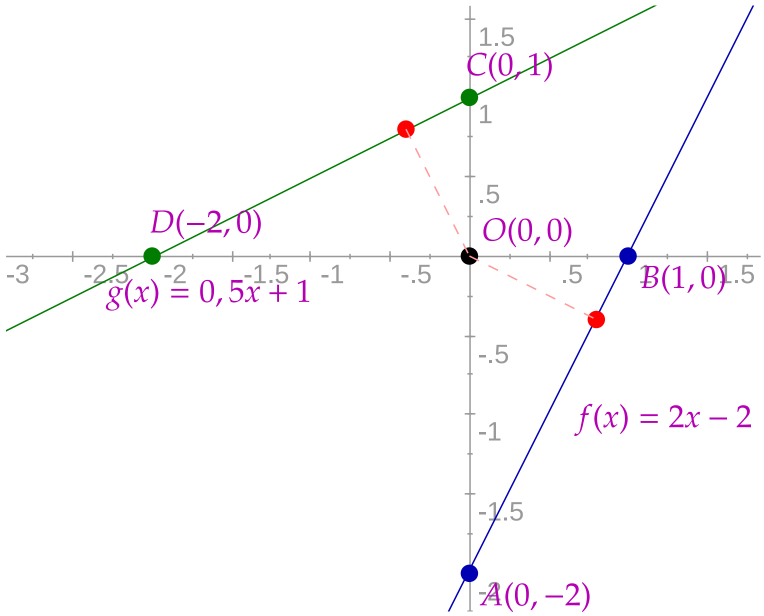

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Graficele celor două funcţii de gradul întâi sunt două drepte. Intersecţiile cu axele ale graficului lui f sunt $A(0,-2)$ şi $B(1,0)$, iar ale graficului lui g sunt $C(0,1)$ şi $D(-2,0)$. Observăm că triunghiurile dreptunghice AOB şi COD sunt congruente. Atunci şi înăţimile corespunzatoare ipotenuzei vor fi egale. Or acestea sunt exact distanţele de la origine la cele două grafice.

15. a.

b. Fie O centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci OG este înălţimea prismei şi în particular $GO \perp AO$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic GOA, avem $AO = \sqrt{GA^2 - GO^2} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - 4^2} = \sqrt{28 - 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

In triunghiul echilateral ABC, AO este $2/3$ din lungimea înălţimii, deci $AO = \dfrac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{AB}{\sqrt{3}}$. Astfel $AB = AO \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

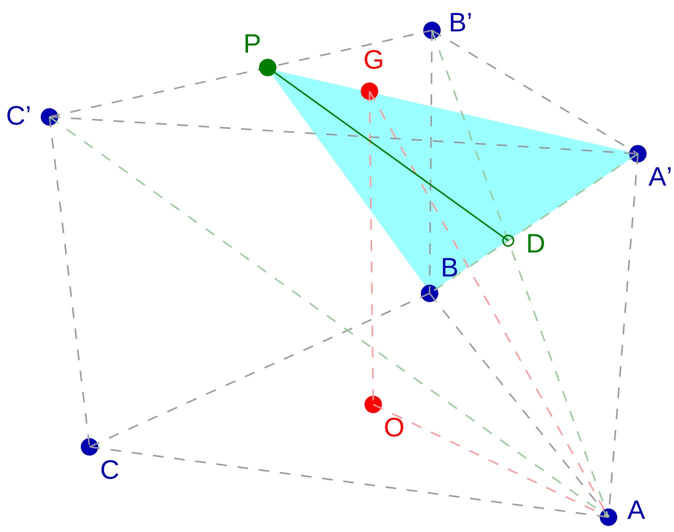

FIGURA 2. Exercițiul 15.

c. Aria bazei este $\frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$. Atunci volumul prismei este $\text{Aria}_{ABC} \cdot AA' = 9\sqrt{3} \cdot 4 = \boxed{36\sqrt{3}}$.

d. Notăm cu D mijlocul segmentului AB'. In triunghiul $B'C'A$, segmentul PD este linie mijlocie, deci $PD \parallel AC'$. Dar PD se află în planul $PA'B$. Fiind paralelă cu dreapta PD din planul $PA'B$, AC' este paralelă şi cu planul.

CAPITOLUL 2

Varianta 97

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $4 \cdot 7 + 3 = 28 + 3 = \boxed{31}$
2. Dacă în fracţia $\frac{7}{8}$ mărim numărătorul cu 4 şi numitorul cu 5 obţinem fracţia $\frac{7+4}{8+5} = \boxed{\frac{11}{13}}$.
3. Avem $123 = 5 \cdot 24 + 3$, deci câtul împărţirii lui 123 la 24 este $\boxed{5}$.
4. Numărul 34925 are 5 cifre dintre care 2 cifre divizibile cu 3 şi anume 3 şi 9. Prin urmare, probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o cifră aceasta să fie divizibilă cu 3 este egală cu $\boxed{\frac{2}{5}}$.
5. Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu $180°$, deci dacă două dintre unghiurile triunghiului au măsura $73°$ şi $36°$, atunci al treilea unghi va avea măsura $180° - (73° + 36°) = 180° - 109° = \boxed{71°}$.
6. Dacă $h = d(AB, DC)$ atunci $A_{ABCD} = AB \cdot h$. Ştiind că $\text{Aria}_{AOB} = \frac{AB \cdot d(O, AB)}{2}$ şi că $d(O, AB) = \frac{d(AB, CD)}{2} = \frac{h}{2}$, avem $\text{Aria}_{AOB} = \frac{AB \cdot d(O, AB)}{2} = \frac{AB \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{AB \cdot h}{4} = \frac{A_{ABCD}}{4} = \frac{32}{4} = \boxed{8}\,\text{cm}^2$.
7. Diametrul bazei este de fapt latura pătratului, deci raza bazei cilindrului este $\frac{8}{2} = 4$ cm, iar înălţimea cilindrului este latura pătratului, adică are o lungime de 8 cm. Volumul cilindrului este atunci
$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = \boxed{128}\,\pi\,\text{cm}^3$$
8. Un paralelipiped dreptunghic are în total $\boxed{12}$ muchii.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Prisma triunghiulară are 5 feţe, iar piramida triunghiulară are 4 feţe. Fie a numărul de prisme, iar b numărul de piramide. Atunci

$$5a + 4b = 42$$

Examinăm răspunsurile posibile.

$a = 8$. Substituind în relaţia de mai sus obţinem $5 \cdot 8 + 4b = 42 \Leftrightarrow 4b = 42 - 40 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$. Imposibil.

$a = 7$. Substituind în relaţia de mai sus obţinem $5 \cdot 7 + 4b = 42 \Leftrightarrow 4b = 42 - 35 \Leftrightarrow b = \frac{7}{4}$. Imposibil.

$a = 6$. Substituind în relaţia de mai sus obţinem $5 \cdot 6 + 4b = 42 \Leftrightarrow 4b = 42 - 30 \Leftrightarrow b = 3$.

$a = 5$. Substituind în relaţia de mai sus obţinem $5 \cdot 5 + 4b = 42 \Leftrightarrow 4b = 42 - 25 \Leftrightarrow b = \frac{17}{4}$. Imposibil.

Deci singurul răspuns convenabil este $a = 6$.

10. $\boxed{C}$: $E(x) = (x+2)^2-(x+1)(x-1) = x^2+4x+4-(x^2-1) = x^2+4x+4-x^2+1 = 4x+5$.

11. $\boxed{B}$: Dacă l este lungimea laturii triunghiului şi r raza cercului înscris triunghiului, avem relaţia $r = \frac{l\sqrt{3}}{6}$. Deci $l = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ cm$, iar perimetrul triunghiului este egal cu $3 \cdot l = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\ cm$.

12. $\boxed{B}$: Fie L lungimea şi l lăţimea dreptunghiului. Faptul că aria dreptunghiului este $19\ cm^2$, revine la $L \cdot l = 19$. Dreptunghiul obţinut mărind lungimea de 3 ori şi lăţimea de 2 ori, are dimensiunile $3L$, respectiv $2l$, iar aria egală cu $3L \cdot 2l = 6L \cdot l = 6 \cdot 19 = 114\ cm^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Totalul zilelor lucrate de muncitori este $13 + 6 + 11 = 30$. O zi de lucru este atunci platită cu $\frac{2088}{30} = 69,60$ lei. Sumele încasate de muncitori sunt:

A: $13 \cdot 69,60 = \boxed{904,80}$ lei

B: $6 \cdot 69,60 = \boxed{417,60}$ lei

C: $11 \cdot 69,60 = \boxed{765,60}$ lei

b. Cum sumele primite sunt proporţţionale cu zilele lucrate, muncitorul B a primit $\frac{6}{30} = 0,2 = \boxed{20\%}$ din suma totală. La acelaşi răspuns se ajunge considerând raportul dintre suma primită de B şi suma totală plătită.

14. a.

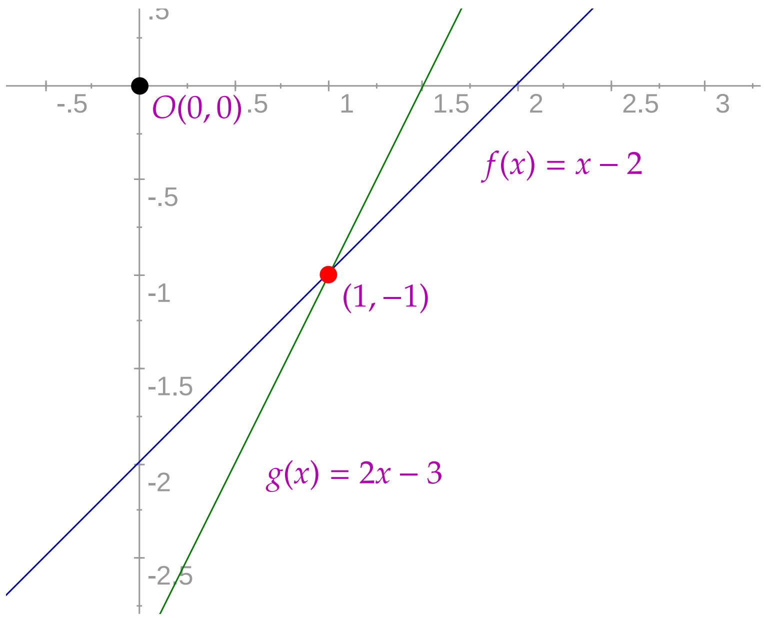

Figura 1. Exercițiul 14.

b. Abcisa punctului de intersecţie al celor două grafice este soluţia ecuaţiei $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow -2 + 3 = 2x - x \Leftrightarrow x = 1$. Cum $f(1) = -1 = g(-1)$, punctul de intersecţie are coordonatele $\boxed{(1, -1)}$.

c. Ecuaţia se scrie sub următoarele forme echivalente

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+1}{a}\right) + g\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{a+1}{a} - 2 + 2\frac{a-1}{a+1} - 3 + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a+1)^2 - 2a(a+1) + 2(a-1)a = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 + 2a + 1 = 2a^2 - 2a + 2a^2 - 2a = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 - 2a + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \boxed{1} \end{aligned}$$

Trebuie să notăm că soluţia verifică într-adevăr condiţia de existenţă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

15. a.

b. Fie a lungimea laturii cubului. Atunci diagonala pătratului $ADD'A'$ este $AD' = a\sqrt{2}$. Deoarece $AB \perp (ADD'A')$, în particular avem $AB \perp AD'$. Aplicând teorema lui Pitagora îtriunghiul dreptunghic $AD'M$, avem $D'M^2 = AM^2 + D'A^2 \Leftrightarrow 6^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 36 = \frac{9a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{4 \cdot 36}{9} = 16$. Deci $a = 4$.

c. Fie E punctul de intersecţie al dreptei MD cu planul $(BB'C')$. Acesta este de fapt punctul de intersecţie al lui MD cu BC. Distanţa căutată este

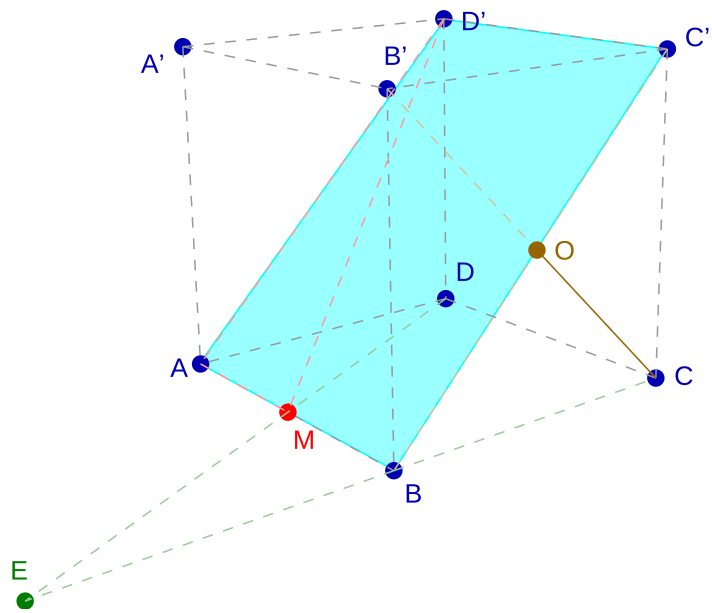

FIGURA 2. Exercițiul 15.

lungimea segmentului CE. Deoarece $MB \parallel CD$ şi $MB = \dfrac{CD}{2}$, rezultă că MB este linie mijlocie în triunghiul ECD. Atunci B este mijlocul lui CE, deci $CE = 2 \cdot BC = \boxed{8}$.

d. Planul $(MC'D')$ este de fapt planul $(ABC'D')$. Fie O mijlocul diagonalei BC'. Atunci $CO \perp BC'$. Pe de altă parte, cum $AB \perp (BCC'B')$, în particular $AB \perp CO$. Din $CO \perp AB$ şi $CO \perp BC'$, rezultă $CO \perp (ABC'D')$. Deci distanţa de la C la planul $(ABC'D')$ este $CO = \boxed{2\sqrt{2}}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 98

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $7 \cdot 2 - 4 = 14 - 4 = \boxed{10}$
2. Ecuaţia $x + 4 = 6$ este echivalentă cu $x = 6 - 4$, deci $x = \boxed{2}$.
3. Numărul de forma $\overline{23x}$ divizibil cu 10 este egal cu $\boxed{230}$.
4. Opusul numărului 7 este $\boxed{-7}$.
5. Aria triunghiului echilateral cu latura de $6\ cm$ este egală cu
$$\frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{9\sqrt{3}}\ cm^2$$
6. Unghiul de măsura 60° şi unghiul format de o latură a sa şi prelungirea celeilalte laturi sunt unghiuri suplementare. Deci, măsura unghiului format de o latură a unghiului de măsură 60° şi prelungirea celeilalte laturi este egală cu $180^\circ - 60^\circ = \boxed{120^\circ}$.
7. $A_{\text{sferă}} = 4\pi r^2$, de unde $r^2 = \frac{A_{\text{sferă}}}{4\pi} = \frac{196\pi}{4\pi} = 49$, deci $r = \sqrt{49} = \boxed{7}\ cm$.
8. $A_l = 3 \cdot A_{\text{feţe}}$. Cum faţa laterală a piramidei date este un triunghi cu baza de $4\ cm$ şi înălţimea corespunzătoare egală cu apotema piramidei, avem $A_{\text{feţe}} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 = 10\ cm^2$. Prin urmare, $A_l = 3 \cdot 10 = \boxed{30}\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $f(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -2 + 1 = -1$
10. $\boxed{D}$: Dacă 10 caiete costă 20 lei, atunci un caiet costă $\frac{20}{10} = 2$ lei. Deci 17 caiete de acelaşi fel costă $17 \cdot 2 = 34$ lei.
11. $\boxed{B}$: Cum M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC ale triunghiului ABC, MN este linie mijlocie în triunghiul ABC. MN fiind linie mijlocie în triunghiul ABC, $MN || BC$, iar lungimea sa este egală cu $\frac{BC}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm$. Din $MN || BC$, rezultă că $MNCB$ este trapez şi cum P este mijlocul lui BM, iar Q mijlocul lui NC, PQ este linie mijlocie în trapezul $MNCB$. Prin urmare, lungimea lui PQ este egală cu $\frac{MN + BC}{2} = \frac{10 + 20}{2} = 15\ cm$.

12. $\boxed{A}$: Unghiul $\widehat{AOC}$ este unghi la centru şi are măsura egală cu măsura arcului de cerc subîntins; deci măsura arcului de cerc AC este egală cu $112°$. Unghiul $\widehat{ABC}$ este unghi înscris în cerc şi are măsura egală cu jumătate din măsura arcului de cerc subîntins. Prin urmare, măsura unghiului $\widehat{ABC}$ este egală cu $\frac{112°}{2} = 56°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie n numărul căutat. Atunci $n-4$ este un multiplu comun al lui $6 = 2 \cdot 3$ şi $15 = 3 \cdot 5$. Mai ştim din enunţ că $n-4$ este cel mai mic număr cu aceste proprietăţi, deci $n-4$ este cel mai mic multiplu comun al lui 6 şi 15. Atunci $n-4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, deci $n = \boxed{34}$.

b. Cum numerele a şi b se divid cu 7, există numerele naturale p, q astfel ca $a = 7p$ şi $b = 7q$. Condiţia $a+b = 35$, revine atunci la $7p+7q = 35 \Leftrightarrow p+q = 5$. Singurele perechi de numere naturale cu această proprietate sunt $p = 1, q = 4$, sau $p = 2, q = 3$, sau $p = 3, q = 2$, sau $p = 4, q = 1$. Atunci perechea (a, b) are ca valori posibile $\boxed{(7,28),(14,21),(21,14),(28,7)}$.

14. a. Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, avem $\frac{3x+6}{x^2+x-2} = \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow (3x+6)(x-1) = 3(x^2+x-2) \Leftrightarrow 3x^2-3x+6x-6 = 3x^2+3x-6$, evident căci $6x-3x = 3x$.

b. Fie $a \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Atunci $\frac{3}{a-1}$ este număr întreg dacă şi numai dacă $a-1$ este divizor al lui 3, adică $a-1 \in \{-1, 1, -3, 3\}$ ceea ce este echivalent cu $a \in \boxed{\{0, 2, -2, 4\}}$.

c. Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$. Atunci

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{x+1} - \frac{4x}{x^2-1} - \frac{3x+6}{x^2+x-2}\right) : \frac{1}{1-x} \\
\overset{(a)}{=} & \left(\frac{2}{x+1} - \frac{4x}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{x-1}\right) \cdot (1-x) \\
= & \frac{2(x-1)-4x-3(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot (1-x) \\
= & \frac{2x-2-4x-3x-3}{(x+1)(x-1)} \cdot (-1) \cdot (x-1) \\
= & \frac{-5x-5}{x+1} \cdot (-1) = \frac{-5(x+1)}{x+1} \cdot (-1) = 5
\end{aligned}$$

15. a.

b. Fie a lungimea laturii pătratului $ABCD$, iar h lungimea înălţimii prismei. Aria laterală a prismei este atunci $4ah$, iar volumul a^2h. Folosind valorile din enunţ obţinem sistemul următor în necunoscutele a şi h: $\begin{cases} 4ah = 100\sqrt{3} \\ a^2h = 125\sqrt{3} \end{cases}$

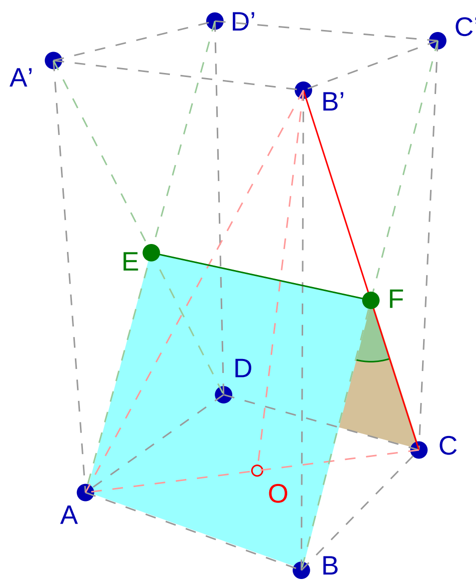

FIGURA 1. Exercițiul 15.

Impărţind a doua ecuaţie la prima, deducem $\frac{a^2h}{4ah} = \frac{125\sqrt{3}}{100\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$ $a = 5$. Substituind în prima ecuaţie, găsim $h = \frac{100\sqrt{3}}{4a} = \frac{100\sqrt{3}}{4\cdot 5} = 5\sqrt{3}$.
Deci înălţimea prismei este $AA' = \boxed{5\sqrt{3}}$, iar latura bazei este $AB = \boxed{5}$ (nu ni s-a cerut dar avem nevoie la punctele următoare).

c. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $B'BC$, avem $B'C = \sqrt{B'B^2 + BC^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{75 + 25} = 10$. Analog din triunghiul $B'AB$, găsim şi $B'A = 10$. Fie O mijlocul lui AC. Cum triunghiul $AB'C$ este isoscel, mediana $B'O$ este şi înălţime. Fiind diagonala într-un pătrat de latura 5, avem $AC = 5\sqrt{2}$. Deci $AO = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $B'OA$, avem $B'O = \sqrt{B'A^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - (\frac{5\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{100 - \frac{25}{2}} = \sqrt{25(4 - \frac{1}{2})} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. Atunci aria triunghiului $B'AC$ este $\text{Aria}_{B'AC} = \frac{AC \cdot B'O}{2} = \frac{5\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{25\sqrt{7}}{2}$.

Fie d distanţa de la A la $B'C$. Atunci $\text{Aria}_{B'AC} = \frac{B'C \cdot d}{2} = \frac{10d}{2} = 5d$.

Folosind valoarea ariei găsită mai sus, avem $5d = \frac{25\sqrt{7}}{2}$, de unde $d = \frac{25\sqrt{7}}{2 \cdot 5} = \boxed{\frac{5\sqrt{7}}{2}}$.

d. Planul (DCB') este de fapt planul $(DCB'A')$, iar planul (ABC') este planul $(ABC'D')$. Intersecţia lor este este dreapta EF, unde E este intersecţia dreptelor AD şi $A'D'$, iar F este intersecţia dreptelor BC' şi $B'C$. Dreapta EF este paralelă cu AB, deci $EF \perp B'C$ şi $EF \perp BC'$. Unghiul dintre planele din enunţ este atunci $\widehat{BFC}$. Dar $BF = CF = \frac{BC'}{2} = 5$. Cum $BC = 5$, triunghiul BFC este echilateral, deci

$$\widehat{BFC} = \boxed{60^\circ}$$

CAPITOLUL 4

Varianta 99

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. Numărul de 4 ori mai mare decât 8 este $4 \cdot 8 = \boxed{32}$.
2. Opusul numărului $2,3$ este numărul $\boxed{-2,3}$.
3. Descompus în factori primi numărul 20 este egal cu $4 \cdot 5 = \boxed{2^2 \cdot 5}$.
4. În urnă fiind 10 bile, dintre care 3 numerotate cu numere mai mici decât 4, probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr mai mic decât 4 este egală cu $\boxed{\frac{3}{10}}$.
5. Media aritmetică a numerelor 5 şi 9 este egală cu $\frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = \boxed{7}$.
6. Diagonalele dreptunghiului sunt congruente şi se înjumătăţesc, deci $DO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5\,cm$. Prin urmare, $P_{DOC} = DO+OC+DC = 2DO+DC \stackrel{DC=AB}{=} 2 \cdot 5 + 6 = 10 + 6 = \boxed{16}\,cm$.
7. $A_t = 6 \cdot A_{\text{feţe}}$, de unde $A_{\text{feţe}} = \frac{A_t}{6} = \frac{216}{6} = \boxed{36}\,cm^2$.
8. Un trunchi de piramidă hexagonală regulată are $3 \cdot 6 = \boxed{18}$ muchii.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Simplificând ecuaţia $2 \cdot [2+2(x+2)] = 24$ prin 2 obţinem $2+2(x+2) = 12$. După o nouă simplificare cu 2 avem $1 + x + 2 = 6$ ceea ce este echivalent cu $x + 3 = 6$, de unde $x = 3$.
10. $\boxed{B}$: Produsul cartezian al mulţimilor $A = \{1, 2, 3, 4\}$ şi $B = \{2, 3, 5\}$ are $4 \cdot 3 = 12$ elemente.
11. $\boxed{D}$: Cum $1\,dam = 10\,m$ şi $1\,dm = 0,1\,m$ avem $s = 0,25\,dam + 2,5\,m + 10\,dm = 2,5\,m + 2,5\,m + 1\,m = 6\,m$.
12. $\boxed{A}$: $A_{ABCD} = baza \cdot \text{înălţimea} = AD \cdot BD = 16\,cm^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie N numărul de elevi participanţi. Dintre aceştia, 15% care reprezintă $\frac{15}{100}N = \frac{3N}{20}$ elevi, au luat premiul I. Numărul de elevi ce nu au luat premiul I este $N - \frac{3N}{20} = \frac{17N}{20}$. Numărul elevilor ce au luat premiul II este $\frac{30}{100} \cdot \frac{17N}{20} = \frac{51N}{200}$.
Adunând la numărul elevilor ce au luat premiul I pe cel al elevilor ce au luat premiul II, pe cei 60 de elevi ce au luat premiul III şi pe cei 59 elevi ce au luat diplome de participare, obţinem pe toţi cei N elevi participanţi. Avem astfel relaţia

$$N = \frac{3N}{20} + \frac{51N}{200} + 60 + 59$$

pe care o mai putem scrie sub formele echivalente

$$N - \frac{3N}{20} - \frac{51N}{200} = 119 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{200N - 30N - 51N}{200} = 119$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{119N}{200} = 119 \Leftrightarrow N = \boxed{200}$$

b. Numărul elevilor ce au luat premiul al doilea este

$$\frac{51N}{200} = \frac{51 \cdot 200}{200} = \boxed{51}$$

14. a. Abcisa punctului de intersecţie al celor două grafice este soluţia ecuaţiei $f(x) = g(x)$, ecuaţie ce poate fi scrisă succesiv sub formele echivalente $-3x + 3 = -x + 4 \Leftrightarrow -3x + x = 4 - 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{-2} = -1/2$. Ordonata punctului de intersecţie este $f(-1/2) = g(-1/2) = 9/2$, deci punctul A de intersecţie are coordonatele $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

b.

c. Intersecţia graficului lui f cu axa Oy este punctul B de coordonate $(0, f(0)) = (0, 3)$, iar intersecţia graficului lui g cu aceaşi axa Oy este punctul C de coordonate $(0, g(0)) = (0, 4)$. Ni se cere aria triunghiului ABC. Lungimea bazei BC este $4 - 3 = 1$, iar lungimea înălţimii din A a acestui triunghi este $\frac{1}{2}$. Aria triunghiului este atunci $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

15. a.

b. Inălţimea h şi diametrul bazei cilindrului sunt egale cu latura pătratului adică 12 cm. Arunci raza R a bazei cilindrului este $\frac{12}{2} = 6$. Aria laterală a cilindrului este $2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 = \boxed{144\pi}\,\mathrm{cm}^2$.
Raza r a sferei fiind 6, aria sferei este $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6^2 = \boxed{144\pi}\,\mathrm{cm}^2$. Deci aria sferei coincide cu aria laterală a cilindrului.

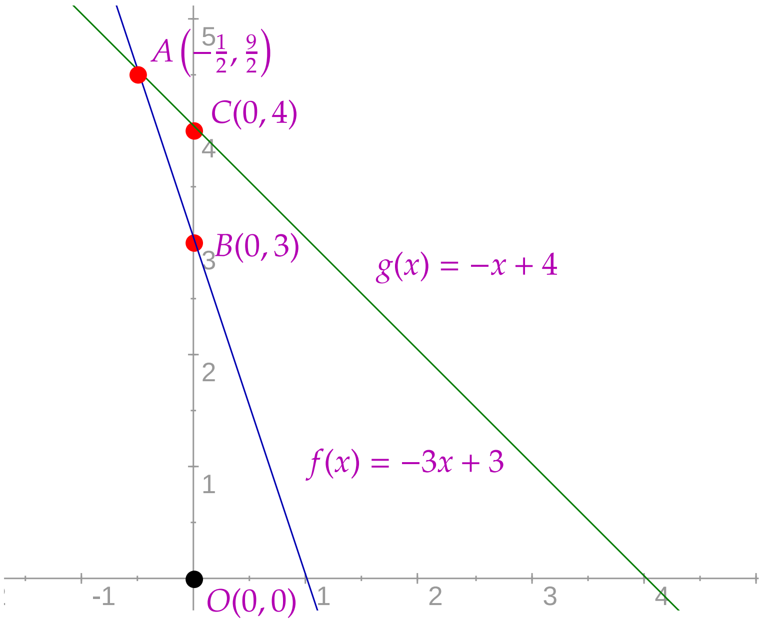

FIGURA 1. Exercițiul 14.

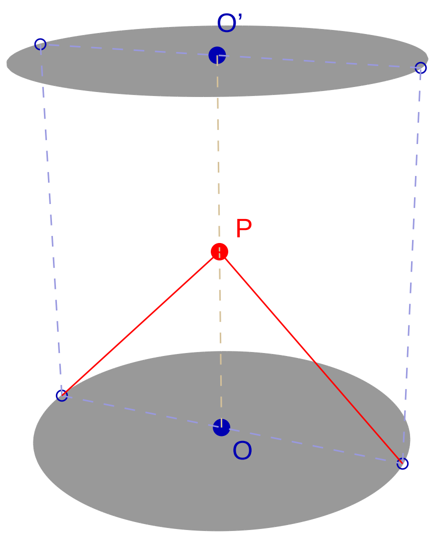

FIGURA 2. Exercițiul 15.

c. Volumul cilindrului este $\pi R^2 \cdot h = \pi 6^2 \cdot 12 = \boxed{432\pi}$ cm^3, iar volumul sferei este $\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi 6^3}{3} = \boxed{288\pi}$ cm^3. Deci volumul cilindrului este mai mare decât volumul sferei.

d. Suprafaţa corpului este formată din suprafaţa laterală a cilindrului, suprafaţa laterală conului (care a înlocuit baza cilindrului) şi cercul care este “capacul” cilindrului. Observăm că generatoarea G a conului este ipotenuză într-un triunghi dreptunghic isoscel cu catete de 6 cm, deci are lungimea de $6\sqrt{2}$ cm. Aria totală a corpului este $2\pi Rh + \pi RG + \pi R^2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 + \pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} + \pi 6^2 = 144\pi + 36\pi\sqrt{2} + 36\pi = \boxed{180\pi + 36\pi\sqrt{2}}$ cm^2.

CAPITOLUL 5

Varianta 100

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. Numărul de 4 ori mai mic decât 8 este $\frac{8}{4} = \boxed{2}$.
2. Inversul numărului $\frac{2}{3}$ este egal cu $\boxed{\frac{3}{2}}$.
3. Dintre numerele $2^3 = 8$ şi $3^2 = 9$ mai mare este numărul $\boxed{3^2}$.
4. În urnă fiind 10 bile, dintre care 6 numerotate cu numere mai mari decât 4, probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă, aceasta să fie numerotată cu un număr mai mare decât 4 este egală cu $\frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$.
5. Fiecare unghi al unui triunghi echilateral are măsura egală cu $\boxed{60^\circ}$.
6. Dacă B este lungimea bazei mari, b lungimea bazei mici şi h lungimea înălţimii trapezului, atunci $A_{trapez} = \frac{(B+b)h}{2}$. Lungimea liniei mijlocii a trapezului este egală cu semisuma lungimilor bazelor trapezului, de unde avem relaţia $\frac{B+b}{2} = 14$. Înlocuind în aria trapezului obţinem $A_{trapez} = 14 \cdot 10 = \boxed{140}\ cm^2$.
7. Piramida triunghiulară regulată are 3 muchii congruente ale bazei şi 3 muchii laterale congruente. Deci, suma tuturor muchiilor piramidei este egală cu $3 \cdot 12 + 3 \cdot 10 = 36 + 30 = \boxed{66}\ cm$.
8. Diagonala paralelipipedului dreptunghic care are dimensiunile $1\ cm$, $\sqrt{3}\ cm$ şi $\sqrt{5}\ cm$ este egală cu

$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{1+3+5} = \sqrt{9} = \boxed{3}\,\text{cm}$$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: $E(2) = (2-1)^{2007} + (1-2)^{2007} = 1^{2007} + (-1)^{2007} = 1 - 1 = 0$.
10. $\boxed{A}$: $\frac{5}{x-2} - \frac{x+3}{x-2} = \frac{5-x-3}{x-2} = \frac{2-x}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$.
11. $\boxed{D}$: Cum $1\,dag = 10\,g$ şi $1\,dg = 0,1\,g$, avem $s = 0,36\,dag + 1,4\,g + 10\,dg = 3,6\,g + 1,4\,g + 1\,g = 6\,g$.

12. $\boxed{B}$: Desfăşurarea suprafeţei laterale a unui cub este un dreptunghi a cărui suprafaţă este egală cu suma suprafeţelor celor 4 feţe laterale ale cubului. Deci lungimea dreptunghiului obţinut prin desfăşurarea laterală a cubului are lungimea egală cu de 4 ori latura cubului, iar lăţimea egală cu latura cubului. Dacă notăm cu a muchia cubului, atunci lungimea dreptunghiului este $4a$. Din ipoteză, lungimea dreptunghiului este $24\ cm$, deci $4a = 24$, de unde $a = \frac{24}{4} = 6\ cm$. Aria dreptunghiului este $24 \cdot 6 = 144\ cm^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Pentru orice cifră x nenulă avem $\overline{x3} \cdot \overline{x5} + 1 = (10x + 3)(10x + 5) + 1 = 100x^2 + 50x + 30x + 15 + 1 = 100x^2 + 80x + 16 = (10x + 4)^2 = \overline{x4}^2$.

b. Avem $\overline{ab} - \overline{ba} = a \cdot b - a \Leftrightarrow (10a + b) - (10b + a) = ab - a \Leftrightarrow 10a = b(a + 9) \Leftrightarrow b = \frac{10a}{a+9} = \frac{10(a+9)-90}{a+9} \Leftrightarrow b = 10 - \frac{90}{a+9}$. Cum b este număr natural, se impune ca $a + 9$ să dividă pe 90. Cum a este o cifră nenulă, $10 \leq a + 9 \leq 18$. Singurele numere naturale din intervalul $[10, 18]$ care divid pe 90 sunt 10, 15 şi 18.

Când $a + 9 = 10$, avem $a = 1$ şi $b = 10 - \frac{90}{10} = 1$. Numărul este $\boxed{\overline{ab} = 11}$.

Când $a + 9 = 15$, avem $a = 6$ şi $b = 10 - \frac{90}{15} = 4$. Numărul este $\boxed{\overline{ab} = 64}$.

Când $a + 9 = 18$, avem $a = 9$ şi $b = 10 - \frac{90}{18} = 5$. Numărul este $\boxed{\overline{ab} = 95}$.

14. a. Rezolvăm ecuaţia în variabila m. Rescriem ecuaţia $2mx^2 + x^2 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2mx^2 = 6 + 7x - x^2 \Leftrightarrow m = \frac{6 + 7x - x^2}{2x^2}$. Substituind $x = -0,6$, obţinem $m = \frac{6 - 7 \cdot 0,6 - (-0,6)^2}{2 \cdot (-0,6)^2} = \frac{6 - 4,2 - 0,36}{0,72} = \frac{1,44}{0,72} = \boxed{2}$.

b. Discriminantul ecuaţiei de gradul doi $3x^2 - 5x + 2 = 0$ este $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1$. Rădăcinile ecuaţiei sunt atunci $x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \boxed{1}$ şi $x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

c. Avem de examinat doua cazuri:

Dacă $y = 0$, atunci ecuaţia devine $3x^2 - 0 + 0 = 0$, de unde $x = 0$. Dar numerele sunt presupuse distincte, deci acest caz este imposibil.

Dacă $y \neq 0$, atunci putem împărţi ecuaţia prin $y^2 \neq 0$. Obţinem $\frac{3x^2}{y^2} - \frac{5xy}{y^2} + \frac{2y^2}{y^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 2 = 0$. Notând cu r raportul $\frac{x}{y}$ dintre x şi

y, relaţia precedentă poate fi scrisă $3r^2 - 5r + 2 = 0$. Conform punctului precedent $r \in \boxed{\left\{1, \frac{2}{3}\right\}}$.

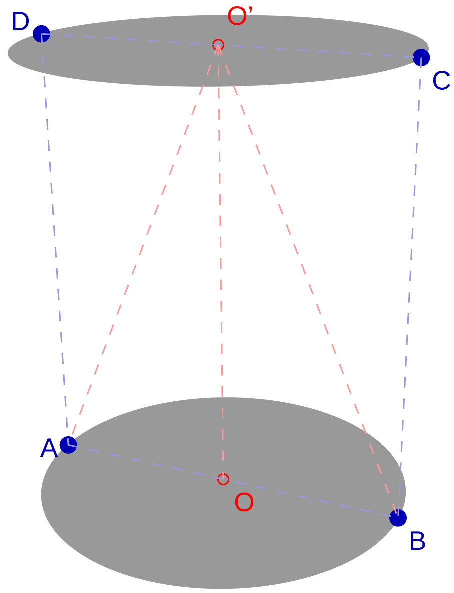

FIGURA 1. Exerciţiul 15 (a)(b)(c).

15. a.

b. Raza bazei cilindrului este $\frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Atunci aria laterală a cilindrului este $2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = \boxed{120\pi}\,\mathrm{cm}^2$.

c. Conul în cauză are aceaşi rază şi aceaşi înălţime cu cilindrul. Atunci volumul conului este $\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = \boxed{100\pi}\,\mathrm{cm}^3$.

d. Desfăşurăm suprafaţa laterală a cilindrului, făcând o "tăietură" verticală de-a lungul lui AD. Obţinem un dreptunghi $AA'D'D$, unde A', respectiv D', este copia lui A, respectiv D, generată de "tăietură". In acest dreptunghi, punctul C se află pe DD'. Distanţa dintre C şi D este jumătate din perimetrul cercului, deci $CD = \pi \cdot 5$. Cea mai scurtă distanţă dintre A şi C pe suprafaţa laterală a cilindrului corespunde lungimii segmentului AC din dreptunghiul obţinut după desfăşurare. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ADC, avem $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + (5\pi)^2} = \sqrt{144 + 25\pi^2}$. Pentru a demonstra inegalitatea cerută, pornim de la faptul că $\pi < 3,2$. Atunci $AC = \sqrt{144 + 25\pi^2} < \sqrt{144 + 25 \cdot 3,2^2} = \sqrt{144 + 25 \cdot 10,24} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$.

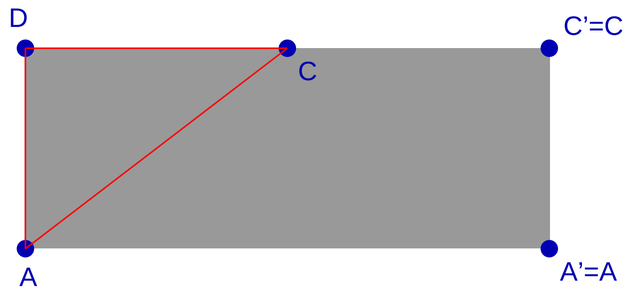

FIGURA 2. Exerciţiul 15 (d).

Pro Didactica vă urează succes la examen.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de liceu.