BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 86–90

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 86

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $273 : 3 = \boxed{91}$
2. Opusul numărului -5 este numărul $-(-5) = \boxed{5}$.
3. Din $\frac{x}{3} = \frac{8}{6}$, avem $x = \frac{3 \cdot 8}{6} = \boxed{4}$.
4. Zarul are 6 feţe dintre care 3 cu numere impare, deci probabilitatea ca să obţinem pe faţa de sus un număr impar este egală cu $\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.
5. Suma a două unghiuri complementare este de 90°, deci complementul unghiului cu măsura de 34° este unghiul de măsură $90^\circ - 34^\circ = \boxed{56^\circ}$.
6. Diagonala dreptunghiului cu lungimea egală cu 16 cm şi lăţimea de 12 cm este egală cu $\sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$ cm.
7. $V = A_{bazei} \cdot h = 20\sqrt{3} \cdot 5 = \boxed{100\sqrt{3}}\,\text{cm}^3$.
8. $A_l = P_{bazei} \cdot h = 40 \cdot 5 = \boxed{200}\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $(2-\sqrt{3})^2 - (-4+5) = 2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 1 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 1 = 6 - 4\sqrt{3}$
10. $\boxed{A}$: Media geometrică a numerelor $a = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}$ şi $b = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$ este egală cu $\sqrt{ab} = \sqrt{(5\sqrt{6} - 5\sqrt{2})(5\sqrt{6} + 5\sqrt{2})} = \sqrt{(5\sqrt{6})^2 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 \cdot 6 - 25 \cdot 2} = \sqrt{150 - 50} = \sqrt{100} = 10$.
11. $\boxed{B}$: Măsura unghiului exterior triunghiului cu vârful în C este egal cu $180^\circ - \hat{C}$. Cum suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°, adică $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, avem $180^\circ - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$. Deci măsura unghiului exterior triunghiului cu vârful în C este $180^\circ - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B} = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$.
12. $\boxed{D}$: Raportul ariilor a două triunghiuri este egal cu pătratul raportului laturilor triunghiului. Cum triunghiurile sunt echilaterale şi au perimetrele de 12 cm, respectiv 15 cm, deducem că laturile triunghiurilor au lungimile $\frac{12}{3} = 4$ cm,

respectiv $\frac{15}{3} = 5$ cm. Deci raportul ariilor triunghiurilor este egal cu $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = (0,8)^2 = 0,64$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie s suma de bani pe care a avut-o persoana iniţial. În prima zi cheltuieşte două treimi din s şi încă 15 lei, adică $\frac{2}{3}s + 15$. După prima zi îi mai rămân $s - \left(\frac{2}{3}s + 15\right) = \frac{1}{3}s - 15$ lei. A doua zi cheltuieşte 40% din cât i-a mai rămas din prima zi, iar restul de 60% îi cheltuieşte a treia zi. Deci a treia zi cheltuieşte $\frac{60}{100}\left(\frac{1}{3}s - 15\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}s - 15\right) = \frac{1}{5}s - 9$ lei. Avem deci relaţia $\frac{1}{5}s - 9 = 27$ ceea ce este echivalent cu $s - 45 = 135$, de unde $s = 135 + 45 = \boxed{180}$ lei.

b. A doua zi cheltuieşte 40% din cât i-a mai rămas din prima zi, adică $\frac{40}{100}\left(\frac{1}{3}s - 15\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{180}{3} - 15\right) = \frac{2}{5}(60 - 15) = \frac{2}{5} \cdot 45 = \boxed{18}$ lei.

14. a.

$$\begin{aligned} E(\sqrt{3}) &= \frac{(\sqrt{3})^3 + 2(\sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3} - 6}{(\sqrt{3})^2 - 4} \\ &= \frac{3\sqrt{3} + 6 - 3\sqrt{3} - 6}{3 - 4} = \boxed{0} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{x^2 - 4} = \frac{x^2(x+2) - 3(x+2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{(x+2)(x^2-3)}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

deci $E(x)$ se simplifică cu $x + 2$ şi după simplificare avem $E(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

c. Avem $E(a) = \frac{a^2 - 3}{a - 2} = \frac{a^2 - 4 + 1}{a - 2} = a + 2 + \frac{1}{a - 2}$, cu $a \in \mathbb{Z} - \{-2, 2\}$. De aici observăm că $E(a) \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai $\frac{1}{a-2} \in \mathbb{Z}$, adică dacă şi numai dacă $a - 2$ divide pe 1. Acesta este echivalent cu $a - 2 \in \{-1, 1\}$ sau $a \in \boxed{\{1, 3\}}$.

15. a.

b. Apotema trunchiului de piramidă este înălţimea feţei laterale. Considerăm faţa laterală $ACC'A'$ care de fapt este trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Fie $A'C \cap AC' = M$ şi fie PQ înălţimea trapezului $ACC'A'$ dusă prin M, unde P este pe $A'C'$, iar Q se află pe AC. În triunghiul

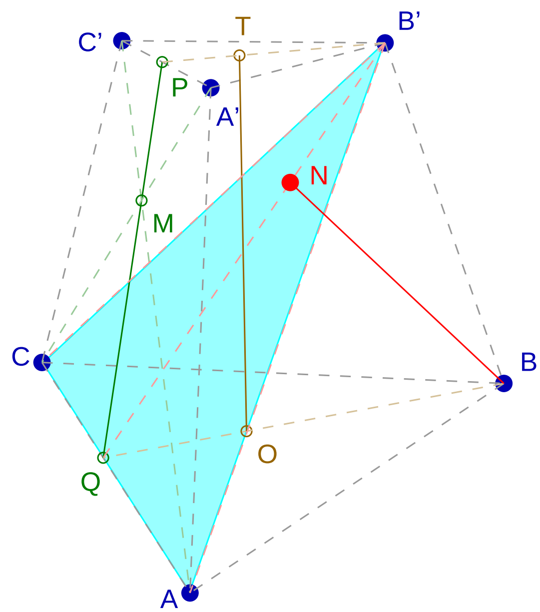

FIGURA 1. Exercițiul 15.

dreptunghic isocel AMC, MQ fiind înălţime, este şi mediană. Din faptul că într-un triunghi dreptunghic mediană relativă la ipotenuză este jumătate din ipotenuză avem că $MQ = \frac{AC}{2} = \frac{24}{2} = 12$ cm. În mod asemănător, PM este mediană relativă la ipotenuză în triunghiul dreptunghic isocel $A'MC'$ şi deci $PM = \frac{A'C'}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm. Prin urmare, $PQ = PM + MQ = 6 + 12 = 18$ cm.

c. Fie T şi O centrele de greutate ale triunghiurilor echilaterale $A'B'C'$, respectiv ABC. Cum centrul de greutate al unui triunghi se află la o treime de latura triunghiului avem $TP = \frac{1}{3}B'P$, iar $OQ = \frac{1}{3}BQ$. Cum $B'P$ şi BQ sunt înălţimi în triunghiuri echilaterale avem $B'P = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm$ şi $BP = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\ cm$, de unde deducem $TP = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\ cm$, iar $OQ = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\ cm$. In trapezul dreptunghic $TOQP$ ducem S proiecţia lui P pe OQ şi avem $QS = QO - SO = QO - PT = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ cm$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PSQ avem $PS = \sqrt{PQ^2 - QS^2} = \sqrt{18^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{324 - 12} = \sqrt{312} = 2\sqrt{78}\ cm$. Dar $PS = TO$ şi astfel înălţimea trunchiului TO are lungimea $2\sqrt{78}$.

Ariile bazelor sunt

$$\begin{aligned} A_B = \text{Aria}_{ABC} &= \frac{24^2\sqrt{3}}{4} = 6\cdot 24\cdot\sqrt{3} = 144\sqrt{3}\ cm^2 \\ A_b = \text{Aria}_{A'B'C'} &= \frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\cdot 12\cdot\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\ cm^2 \end{aligned}$$

şi atunci volumul trunchiului este

$$\begin{aligned} V &= \frac{TO\cdot(A_B + A_b + \sqrt{A_B\cdot A_b})}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{78}(144\sqrt{3}+36\sqrt{3}+\sqrt{144\sqrt{3}\cdot 36\sqrt{3}})}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{78}\cdot(180\sqrt{3}+12\cdot 6\cdot\sqrt{3})}{3} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{26}\cdot 252\sqrt{3}}{3} \\ &= \boxed{504\sqrt{26}}\ cm^3 \end{aligned}$$

d. Din $BQ \perp AC$ şi $PQ \perp AC$, avem că AC este perpendiculară pe două drepte concurente din planul $BQPB'$, deci $AC \perp (BQPB')$. Cum $AC \subset (AB'C)$ şi $AC \perp (BQPB')$, rezultă că $(AB'C) \perp (BQPB')$. Cum $(AB'C) \cap (BQPB') = B'Q$, rezultă că distanţa de la punctul B la planul $(AB'C)$ este perpendiculare din B pe dreapta $B'Q$. Fie N proiecţia lui B pe $B'Q$. Înălţimea triunghiului $BB'Q$ dusă din B' este egală cu înălţimea trunchiului de piramidă, deci are lungimea eglă cu $2\sqrt{78}\ cm$, de unde avem că $\text{Aria}_{B'BQ} = \frac{BQ\cdot 2\sqrt{78}}{2} = 12\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\cdot 26} = 36\sqrt{26}\ cm^2$. Pe de altă parte, $A_{B'BQ} = \frac{BN\cdot B'Q}{2}$, de unde

$$BN = \frac{2A_{B'BQ}}{B'Q} = \frac{72\sqrt{26}}{B'Q} \quad (1)$$

Prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $B'QA$ avem

$$B'Q = \sqrt{AB'^2 - AQ^2} \quad (2)$$

Segmentul AB' este diagonală în trapezul dreptunghic $ABB'A$, care este faţă laterală a trunchiului de piramidă. În triunghiul dreptunghic isoscel AMC, avem $m(\widehat{MAC}) = 45°$ şi $\cos\widehat{MAC} = \frac{AM}{AC}$, de unde $AM = AC\cdot\cos 45° = 24\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}\ cm$. Asemănător, în triunghiul dreptunghic isocel $A'MC'$, avem $m(\widehat{A'C'M}) = 45°$ şi $\cos\widehat{A'C'M} = \frac{MC'}{A'C'}$, de unde $MC' = A'C'\cdot\cos 45° = 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ cm$. Prin urmare, diagonala AC' a feţei laterale este egală cu $12\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\ cm$. Cum feţele laterale sunt congruente avem $AB' = AC' = 18\sqrt{2}\ cm$. Înlocuind în relaţia (2) obţinem $B'Q = \sqrt{(18\sqrt{2})^2 - 12^2} = \sqrt{648 - 144} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}\ cm$. În final, revenind la relaţia (1) deducem

$$BN = \frac{72\sqrt{26}}{6\sqrt{14}} = \frac{12\sqrt{13}}{\sqrt{7}} = \boxed{\frac{12\sqrt{91}}{7}}$$

CAPITOLUL 2

Varianta 87

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $21 \cdot 5 = \boxed{105}$
2. $\dfrac{40}{100} \cdot 45 = \dfrac{2}{5} \cdot 45 = \boxed{18}$
3. $x - 1 \leq 0$ este echivalent cu $x \leq 1$ sau $x \in \boxed{(-\infty, 1]}$
4. Un număr este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu trei. Suma cifrelor numărului $\overline{x36}$, cu $x \in \{1, 2, ..., 9\}$ este egală cu $x + 3 + 6 = 9 + x$. Cel mai mic număr $x \in \{1, 2, ..., 9\}$ pentru care $9 + x$ este divizibil cu 3 este $x = 3$. Deci cel mai mic număr de forma $\overline{x36}$ divizibil cu 3 este egal cu $\boxed{336}$.
5. 1 dag$=$ 10 g$=$ $0,01$ kg, deci 120 dag$=$ $\boxed{1,2}$ kg
6. Perimetrul pătratului de latură 8 cm este egal cu $4 \cdot 8 = \boxed{32}$ cm.
7. $V_{cilindru} = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = \pi \cdot 25 \cdot 6 = \boxed{150}\pi\,\mathrm{cm}^3$.
8. Feţele laterale ale piramidei triunghiulare regulate sunt triunghiuri laterale cu latura de lungime 6 cm, deci aria unei feţe este $\dfrac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 18 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Cum sunt 3 feţe laterale, aria laterală este $A_l = 3{\cdot}9\sqrt{3} = \boxed{27\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Discriminantul ecuaţiei de gradul doi $x^2 + 6x - 55 = 0$ este $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-55) = 36 + 220 = 256$, iar rădăcinile sunt $x_1 = \dfrac{-6 + \sqrt{256}}{2} = \dfrac{-6 + 16}{2} = \boxed{5}$ şi $x_2 = \dfrac{-6 - 16}{2} = \boxed{-11}$.
10. $\boxed{D}$:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x^2 - 3x + x - 3}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x(x-3) + (x-3)}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2} = \frac{x+1}{x-3} \end{aligned}$$

11. $\boxed{D}$: Triunghiul ABC fiind isoscel, unghiurile congruente $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ au măsura egală cu $\dfrac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. În triunghiul dreptunghic ADC avem $\sin \widehat{ACD} = \dfrac{AD}{AC}$, de unde $AD = AC \sin \widehat{ACD} = 24 \sin 30^\circ = 24 \cdot \dfrac{1}{2} = 12\ cm$.
12. $\boxed{A}$: Un poligon convex cu n laturi, are $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonale. De aici rezultă că hexagonul, care are 6 laturi, va avea $\dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$ diagonale.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Suma S are $103 - 43 = \boxed{60}$ de termeni.
    b. Cum suma are 60 de termeni, fiecare din ei fiind mai mic decât $\dfrac{1}{40}$, suma S este mai mică decât $60 \cdot \dfrac{1}{40} = \dfrac{3}{2}$.

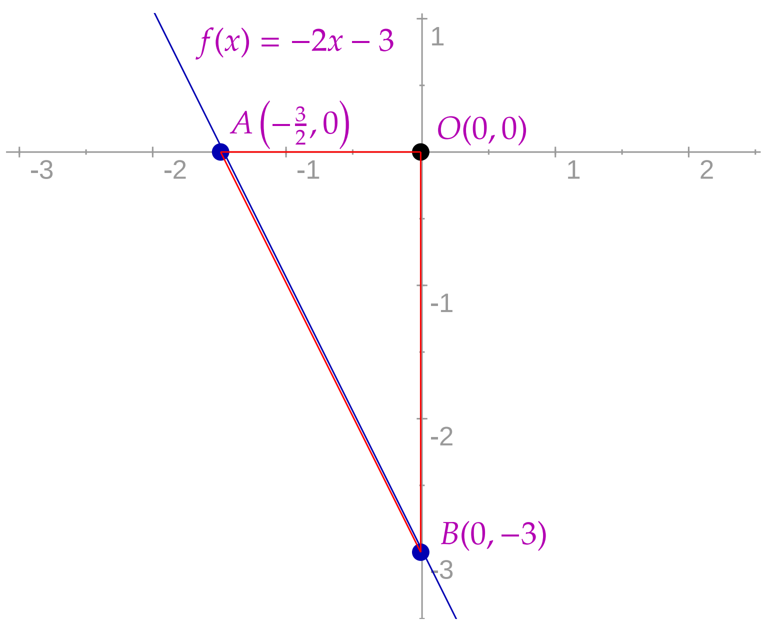

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.
    b. Determinăm mai întâi intersecţiile graficului lui f cu axele de coordonate. Intersecţia cu Ox are ordonata $y = 0$, deci obţinem $-2x - 3 = 0$, de unde $x = -\dfrac{3}{2}$. Prin urmare, graficul funcţiei f intersectează Ox în punctul $A\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

Intersecţia cu Oy are abscisa $x = 0$, de unde $y = -2 \cdot 0 - 3 = -3$. Deci, graficul funcţiei f intersectează Oy în punctul $B(0, -3)$.

Triunghiul AOB este dreptunghic cu unghiul drept în O şi $A_{AOB} = \dfrac{AO \cdot BO}{2} = \dfrac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = \boxed{\dfrac{9}{4}}$.

c.

$$\begin{aligned} \frac{f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{(-2\sqrt{3} - 3) - (-2\sqrt{2} - 3)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{-2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \boxed{-2 \in \mathbb{Q}} \end{aligned}$$

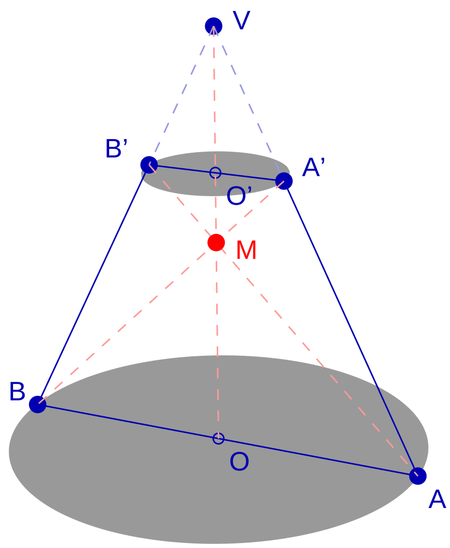

FIGURA 2. Exerciţiul 15 (a)(b)(c).

15. a.

b. Fie $VO \cap A'B' = \{O'\}$ şi $A'B \cap AB' = \{M\}$. Din $A'O' \| AO$, conform teoremei fundamentale a asemănării rezultă că triunghiurile $VO'A'$ şi VOA sunt asemenea, de unde

$$\frac{A'O'}{AO} = \frac{VO'}{VO} \quad (1)$$

În triunghiul dreptunghic isocel AMB, MO este mediană relativă la ipotenuză şi are lungimea egală cu $\frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm. Similar, în triunghiul dreptunghic isocel $A'MB'$, MO' este mediană relativă la ipotenuză şi are lungimea egală cu $\frac{A'B'}{2} = A'O'$. Deci $OO' = MO + MO' = 6 + A'O'$, iar $VO' = VO - OO' = 12 - 6 - A'O' = 6 - A'O'$. Înlocuind în relaţia (1) avem $\dfrac{A'O'}{6} = \dfrac{6 - A'O'}{12}$ ceea ce este echivalent cu $2A'O' = 6 - A'O'$ sau $3A'O' = 6$, de unde $A'O' = \dfrac{6}{3} = 2\ cm$.

c. Avem $OO' = 6 + A'O' = 6 + 2 = 8\ cm$, deci

$$\begin{aligned} V_{\text{trunchi de con}} &= \frac{\pi \cdot OO' \cdot (AO^2 + A'O'^2 + AO \cdot A'O')}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot 8(6^2 + 2^2 + 6 \cdot 2)}{3} = \frac{\pi \cdot 8(36 + 4 + 12)}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot 8 \cdot 52}{3} = \boxed{\frac{416\pi}{3}}\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

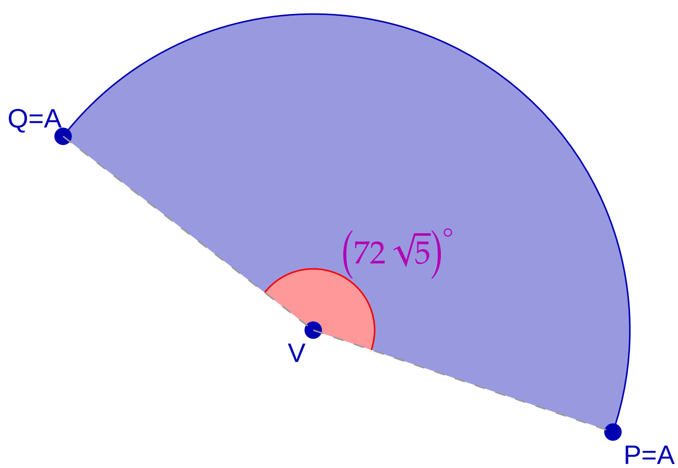

Figura 3. Exerciţiul 15 (d).

d. Fie PVQ sectorul de cerc după care se desfăşoară suprafaţa laterală a conului din care provine trunchiul de con. Aria sectorului de cerc PVQ este egală cu aria laterală a conului adică $\pi \cdot AO \cdot VA$. Calculăm generatoarea conului aplicând teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA. Avem $VA = \sqrt{VO^2 + AO^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 36} = 6\sqrt{5}$ cm. Prin urmare, aria laterală a conului este egală cu $\pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{5} = 36\sqrt{5}\pi\ cm^2$. Deci $A_{PVQ} = 36\sqrt{5}\pi$. Aplicând acum formula pentru aria sectorului de cerc, avem $A_{PVQ} = \dfrac{\pi \cdot VP^2 \cdot m(\widehat{PVQ})}{360^\circ}$, unde VP este raza sectorului de cerc, adică generatoarea conului. Obţinem aşadar $36\sqrt{5}\pi =$

$\dfrac{\pi \cdot (6\sqrt{5})^2 \cdot m(\widehat{PVQ})}{360^\circ}$, de unde $m(\widehat{PVQ}) = \dfrac{36\sqrt{5}\pi \cdot 360^\circ}{36 \cdot 5\pi} = (72\sqrt{5})^\circ$. Pentru a arăta cerinţa enunţului, observăm că $72\sqrt{5} < 161 \Leftrightarrow 72^2 \cdot 5 < 161^2 \Leftrightarrow 25920 < 25921$ ceea ce este adevărat.

CAPITOLUL 3

Varianta 88

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $(-4)+(-2)=\boxed{-6}$
2. Din $\frac{x}{4}=\frac{7}{2}$ avem $x=\frac{4\cdot 7}{2}=\boxed{14}$.
3. Numărul de 5 ori mai mic decât 420 este $\frac{420}{5}=\boxed{84}$.
4. Cum $1\,m=100\,cm$, avem $14\,m=\boxed{1400}\,cm$.
5. $(3x+3x-5x):x=x:x=\boxed{1}$
6. Diagonala unui pătrat cu latura $10\,cm$ este egală cu $\boxed{10\sqrt{2}}$ cm.
7. $A_l=\frac{P_B\cdot a_p}{2}$, unde P_B este perimetrul bazei şi a_p apotema piramidei. Piramida fiind patrulateră regulată cu latura bazei de $6\,cm$ avem $P_B=4\cdot 6=24\,cm$, deci $A_l=\frac{24\cdot 12}{2}=12\cdot 12=\boxed{144}\,cm^2$.
8. $V=\pi\cdot r^2\cdot g=\pi\cdot 11^2\cdot 10=\boxed{1210}\pi\,cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Discriminantul ecuaţiei de gradul doi $x^2+6x-7=0$ este $\Delta=4\cdot 6^2-4\cdot 1\cdot(-7)=36+28=64=8^2$, de unde $x_1=\frac{-6+8}{2}=\frac{2}{2}=1$ şi $x_2=\frac{-6-8}{2}=\frac{-14}{2}=-7$.
10. $\boxed{B}$: $\sqrt{144}:\sqrt{12}=\sqrt{144:12}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
11. $\boxed{D}$: Avem $AB=AC-BC=15-7=8$, de unde $AM=MB=\frac{AB}{2}=\frac{8}{2}=4\,cm$. Cum N este mijlocul lui CD, avem $CN=ND=\frac{CD}{2}=\frac{4}{2}=2\,cm$. Prin urmare, $MN=MB+BC+CN=4+7+2=13\,cm$.

12. $\boxed{C}$: Fie P proiecţia lui C pe AB. Avem $PB = AB - AP = AB - DC = 8-6 = 2\,cm$. În triunghiul dreptunghic BPC avem $\cos\widehat{PBC} = \frac{PB}{BC}$, de unde $BC = \frac{PB}{\cos\widehat{PBC}} = \frac{2}{\cos 60^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4\,cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Avem $a = \frac{-476}{238} = -2$ şi $c = 0,(5)\cdot 1\frac{4}{5} = \frac{5}{9}\cdot\frac{9}{5} = 1$, de unde $a + c = -2 + 1 = \boxed{-1}$.

b. Avem $b = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{4})^2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2} + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{7})^2} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{(\sqrt{9})^2-(\sqrt{8})^2} = \sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8}+\sqrt{8}-\sqrt{9} = \sqrt{9}-\sqrt{4} = 3-2 = 1$.
Deci $a + b = c = -2 + 1 + 1 = \boxed{0}$.

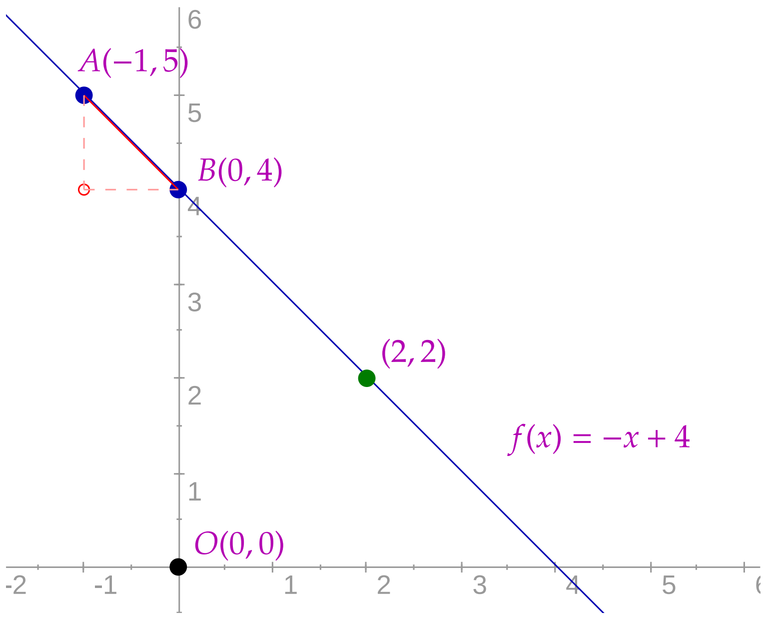

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a. Faptul că punctele $A(-1,5)$ şi $B(0,4)$ sunt pe graficul funcţiei f revine la

$$\begin{cases} a\cdot(-1) + b = 5 \\ a\cdot 0 + b = 4 \end{cases}$$

Din a doua ecuaţie avem $b = 4$ şi substituind în prima ecuaţie obţinem $-a + 4 = 5$, de unde $a = -1$. Funcţia este deci $f(x) = \boxed{-x+4}$.

b. Reprezentând grafic punctele A şi B într-un sistem de axe de coordonate, vedem că AB este ipotenuza unui triunghi drepunghic isoscel cu catetele de lungime 1. Deci $AB = \boxed{\sqrt{2}}$.

c. Căutăm un punct de coordonate (c, c) situat pe graficul funcţiei date de $f(x) = -x + 4$. Atunci $-c + 4 = c$, sau $4 = 2c$, de unde $c = 2$. Punctul căutat este deci $\boxed{(2, 2)}$.

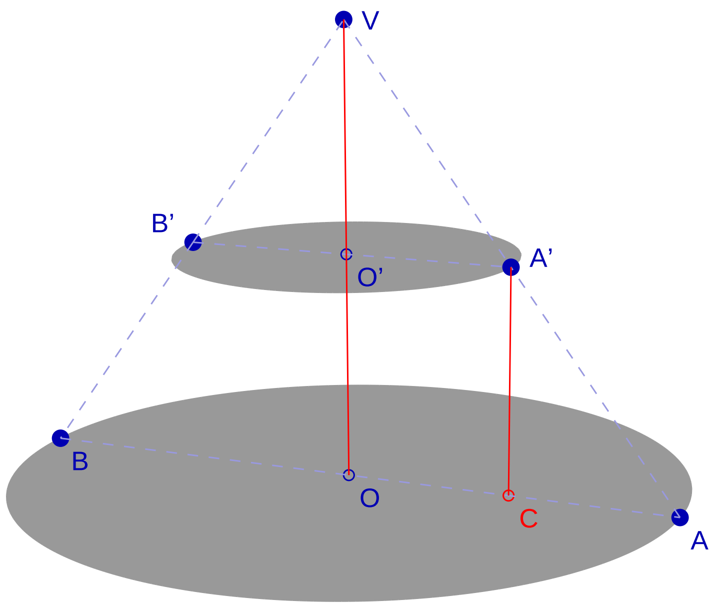

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie h înălţimea, iar g generatoarea trunchiului. Faptul că raza bazei mici (de lungime 15), h şi g sunt proporţionale cu $3, 4, 5$ revine la $\dfrac{15}{3} = \dfrac{h}{4} = \dfrac{g}{5}$. De aici, $g = \dfrac{5 \cdot 15}{3} = 25$ şi $h = \dfrac{4 \cdot 15}{3} = \boxed{20}$ cm.

c. Fie $ABB'A'$ o secţiune axială a trunchiului, A, B puncte pe baza mare, iar A', B'' puncte pe baza mică. Fie O centrul bazei mari, O' centrul bazei mici, iar C proiecţia lui A' pe AB. Am văzut la punctul (b) că $AA' = 25$ cm, $A'O' = 15$ cm şi $A'C = 20$ cm. Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'CA$, avem $CA = \sqrt{A'A^2 - A'C^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$ cm. Cum $OC = O'A' = 15$, rezultă $OA = OC + CA = 15 + 15 = 30$ cm.
Atunci aria laterală a trunchiului este $\pi \cdot AA' \cdot (OA + O'A') = \pi \cdot 25 \cdot (30 + 15) = \boxed{1125\pi}$ cm.

d. Fie V vârful conului din care provine trunchiul. Cum bazele trunchiului sunt paralele, rezultă că triunghiurile VOA' şi VOA sunt asemenea. Atunci $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{O'A'}{OA}$. Făcând proporţii derivate, obţinem $\dfrac{VO - VO'}{VO} =$

$\frac{OA - O'A'}{OA}$, sau $\frac{20}{VO} = \frac{15}{30}$. De aici deducem $VO = \frac{20 \cdot 30}{15} = 40$ cm.
Volumul conului este atunci $V = \frac{\pi \cdot OA^2 \cdot VO}{3} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 40}{3} = \boxed{12000\pi}$.

CAPITOLUL 4

Varianta 89

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $200 - 50 : 2 = 200 - 25 = \boxed{175}$
2. Cel mai mare număr format din patru cifre impare, diferite două câte două, este egal cu $\boxed{9753}$.
3. $\frac{70}{100} \cdot 350 = 7 \cdot 35 = \boxed{245}$
4. Dacă $A = \{5, 6, 7\}$ şi $B = \{5, 8\}$, atunci $A \cap B = \boxed{\{5\}}$.
5. Un număr este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă cifra în care se termină este 0 sau 5. Deci dintre numerele 125 şi 301, numărul divizibil cu 5 este $\boxed{125}$.
6. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu $\boxed{360°}$.
7. Dacă a este muchia cubului, atunci $V_{cub} = a^3$. Avem deci relaţia $a^3 = 8$, de unde rezultă $a = \boxed{2}\, cm$.
8. $A_l = 2\pi \cdot r \cdot g = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = \boxed{400}\pi\, cm^2$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Ecuaţia $(x + 3)^2 + 2(x + 1)^2 = 11$ se rescrie $x^2 + 6x + 9 + 2x^2 + 4x + 2 = 11$. Reducând termeni asemenea avem $3x^2 + 10x = 0$. Dăm factor comun x şi obţinem $x(3x + 10) = 0$, de unde $x = 0$ sau $3x + 10 = 0$. Prin urmare, soluţiile ecuaţie date sunt $x_1 = \boxed{0}$ şi $x_2 = \boxed{-\frac{10}{3}}$.
10. $\boxed{B}$: Amplificând raportul $\frac{2x + 3}{x}$ cu $2x$ obţinem $\frac{2x(2x + 3)}{2x \cdot x} = \frac{4x^2 + 6x}{2x^2}$.
11. $\boxed{B}$: $L_{cerc} = 2\pi \cdot r$, de unde $r = \frac{L_{cerc}}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5\, cm$. Deci diametrul cercului are lungimea egală cu $2r = 2 \cdot 5 = 10\, cm$.
12. $\boxed{C}$: Fie $\{M\} = EF \cap AC$. Din $EM || DC$ rezultă conform teoremei fundamentale a asemănării că triunghiurile AEM şi ADC sunt asemenea. Deci $\frac{AE}{AD} = \frac{EM}{DC}$ (1). Cum $AD = 4DE$ şi $DE = AD - AE$, avem $AD = 4(AD - AE)$ ceea ce este echivalent cu $3AD = 4AE$ sau $\frac{AE}{AD} = \frac{3}{4}$. Revenind la relaţia (1) avem

$\frac{3}{4} = \frac{EM}{4}$, de unde $EM = 3\ cm$. Din $MF \| AB$ rezultă conform teoremei fundamentale a asemănării că triunghiurile CMF şi CAB sunt asemenea. Avem deci $\frac{MF}{AB} = \frac{CF}{FB}$ (2). Cum $\frac{CF}{CB} = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{4}$ înlocuind în relaţia (2), obţinem $\frac{MF}{8} = \frac{1}{4}$, de unde $MF = \frac{8}{4} = 2\ cm$. Prin urmare, $EF = EM + MF = 3 + 2 = 5\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie c numărul de răspunsuri corecte date de Radu. Cum a răspuns la toate întrebările, Radu a dat atunci $20 - c$ răspunsuri greşite. Numărul de puncte acumulate este

$$20 \cdot c - 10 \cdot (20 - c) = 30c - 200$$

Rezolvând ecuaţia $30c - 200 = 220$, obţinem $c = \frac{420}{30} = \boxed{14}$ răspunsuri corecte date de Radu.

b. Condiţia din enunţ revine la $30c - 200 > 350 \Leftrightarrow 30c > 350 + 200 \Leftrightarrow c > \frac{550}{30} = 18,(3)$. Cum c este număr întreg, rezultă că Radu trebuie să dea cel puţin $c = \boxed{19}$ răspunsuri corecte pentru a depăşi 350 de puncte.

14. a. Faptul că punctul $A(-2,0)$ aparţine graficului lui f revine la $f(-2) = 0 \Leftrightarrow -2m + m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \boxed{-5}$.

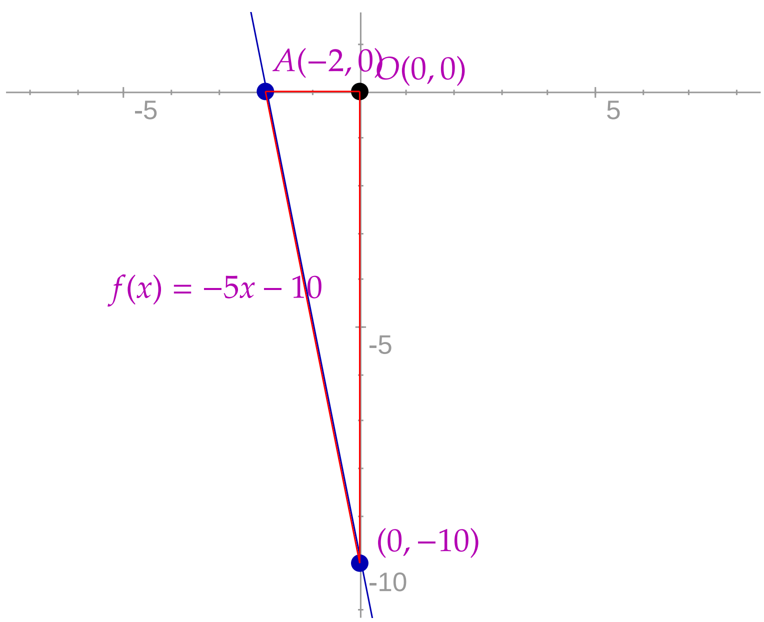

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Pentru $m = -5$, funcţia are forma $f(x) = -5x - 10$. Ştim deja că intersecţia dreptei care este graficul acestei funcţii cu axa Ox este punctul $A(-2, 0)$. Cum $f(0) = -10$, intersecţia graficului lui f cu axa Oy este punctul $B(0, -10)$. Triunghiul din enunţ este triunghiul dreptunghic AOB, cu unghiul drept în O. Catetele au lungimile $AO = 2$ şi $BO = 10$. Conform teoremei lui Pitagora ipotenuza are lungimea $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$. Perimetrul triunghiului este atunci $2 + 10 + 2\sqrt{26} = \boxed{12 + 2\sqrt{26}}$.

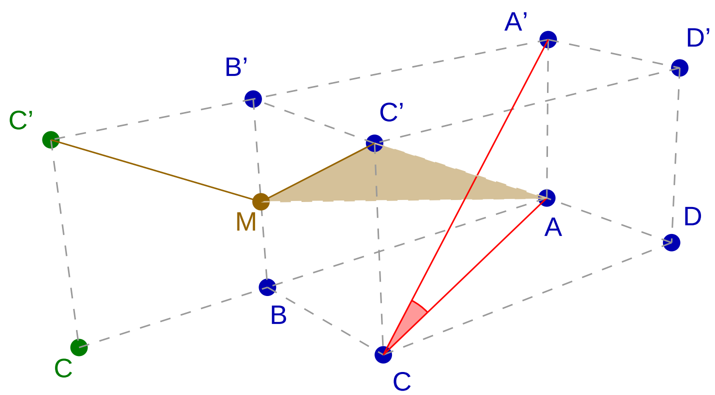

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Aria totală este $2(AB \cdot AA' + AB \cdot BC + BC \cdot AA') = 2(30 \cdot 15 + 30 \cdot 15 + 15 \cdot 15) = \boxed{2250}\ \mathrm{cm}^2$.

c. Proiecţia lui $A'C$ pe planul (ABC) este AC, deci unghiul determinat de dreapta $A'C$ cu planul (ABC) este $\widehat{A'CA}$.
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC, avem $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 15^2} = \sqrt{(2 \cdot 15)^2 + 15^2} = 15\sqrt{2^2 + 1} = 15\sqrt{5}$.
In triunghiul dreptunghic $A'AC$, avem

$$\operatorname{tg} \widehat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} = \frac{15}{15\sqrt{5}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

d. Cum latura AC' este fixă, perimetrul triunghiului AMC' este minim când suma laturilor $AM + MC'$ este minimă. Desfăşurăm suprafaţa laterală a paralelipipedului şi ne concentrăm atenţia pe dreptunghiul $ACC'A'$ obţinut din "lipirea" dreptunghiurilor $ABB'A'$ şi $BCC'B'$. Folosind inegalitatea triunghiului, suma $AM + MC'$ este minimă atunci când punctul

M este intersecţia lui AC' cu BB'. In acest caz, triunghiurile AMB şi ACC' sunt asemenea (ca o consecinţă a faptului că $BM \| CC'$). De aici, $\dfrac{BM}{CC'} = \dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{BM}{15} = \dfrac{30}{45} \Leftrightarrow BM = \dfrac{30 \cdot 15}{45} = 10$. Punctul M este determinat prin faptul că se găseşte la distanţa de $\boxed{10}$ cm de B.

CAPITOLUL 5

Varianta 90

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $5 \cdot 3 - 7 = 15 - 7 = \boxed{8}$
2. Dintre numerele $a = 2,85$ şi $b = 2,58$, mai mare este numărul $\boxed{a}$.
3. Dacă cu un kilogram de vopsea se pot vopsi $3\ m^2$ de perete, atunci cu $5\,kg$ de vopsea se pot vopsi $5 \cdot 3 = \boxed{15}\ m^2$ de perete.
4. Media aritmetică a numerelor 12 şi 24 este egală cu $\frac{12+24}{2} = \frac{36}{2} = \boxed{18}$.
5. Dacă perimetrul pătratului este de $36\ cm$, atunci latura pătratului are lungimea egală cu $\frac{36}{4} = 9\ cm$. Deci aria pătratului este egală cu $9^2 = \boxed{81}\ cm^2$.
6. Hexagonul regulat are $\boxed{6}$ laturi.
7. $V_{\text{piramidă}} = \frac{1}{3} A_{bazei} \cdot h$, unde h este înălţimea piramidei. Avem deci, $h = \frac{3V_{\text{piramidă}}}{A_{bazei}} = \frac{3 \cdot 48}{36} = \boxed{4}$ cm.
8. $A_l = \pi \cdot g(R + r)$, unde g este generatoarea trunchiului de con, R raza bazei mari şi r raza bazei mici. Deci $A_l = \pi \cdot 4(5 + 2) = \boxed{28}\pi\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: $|\sqrt{3} - 1| - |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 1 = 0$
10. $\boxed{B}$: Dacă 2 muncitori sapă şanţul în 6 zile, atunci un muncitor îl va termina în $2 \cdot 6 = 12$ zile. Prin urmare, cu 3 muncitori şanţul va fi săpat în $\frac{12}{3} = 4$ zile.
11. $\boxed{D}$: În sistemul

$$\begin{cases} 3x + y & = & -2 \\ -5x - 3y & = & 2 \end{cases}$$

înmulţim prima ecuaţie cu 3 şi obţinem

$$\begin{cases} 9x + 3y & = & -6 \\ -5x - 3y & = & 2 \end{cases}$$

Adunând cele două ecuaţii avem $4x = -4$, de unde $x = \frac{-4}{4} = -1$. Substituind în prima ecuaţie avem $y = -2 - 3x = -2 - 3 \cdot (-1) = -2 + 3 = 1$.

12. $\boxed{D}$: Suma măsurilor unghiurilor interne alăturate bazei triunghiului, este egală cu unghiul extern de $85°$. Aceste unghiuri interne sunt egale, deci fiecare are măsura de $\frac{85°}{2} = 42°30'$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Elevii care au obţinut note mai mari sau egale cu 8 sunt cei 32 care au luat note între 8 şi $8,99$, la care se adaugă cei 28 care au luat note între 9 şi $9,99$, plus 1 elev cu nota 10. In total, avem $32 + 28 + 1 = \boxed{61}$ elevi cu nota de cel puţin 8.

b. Elevii care au luat mai mici decât 6 sunt cei 2 care au luat note mai mici de 5, la care se adaugă cei 7 care au luat note între 5 şi $5,99$, deci în total $2 + 7 = 9$ elevi. Cum în total sunt $2 + 7 + 18 + 32 + 32 + 28 + 1 = 120$ elevi, probabilitatea căutată este $\frac{9}{120} = \boxed{\frac{3}{40}}$.

14. a. Deoarece $f(1) = 1 - 2 = -1$, $f(2) = 2 - 2 = 0$, $f(3) = 3 - 2 = 1$ şi $f(5) = 5 - 2 = 3$, mulţimea valorilor funcţiei f este $\boxed{\{-1, 0, 1, 3\}}$.

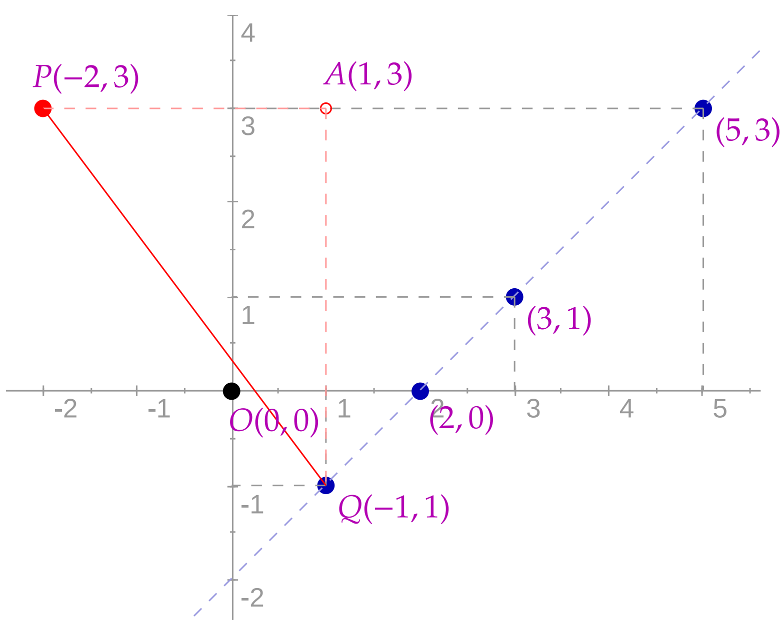

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Punctul de abcisă 1 de pe graficul lui f este $Q(1, -1)$. Considerăm şi punctul $A(1, 3)$ şi observăm că triunghiul PAQ are unghiul $\widehat{PAQ}$ drept. De asemenea, mai observăm că $AP = 2 + 1 = 3$ şi $AQ = 3 + 1 = 4$. Folosind teorema lui Pitagora, deducem $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \boxed{5}$.

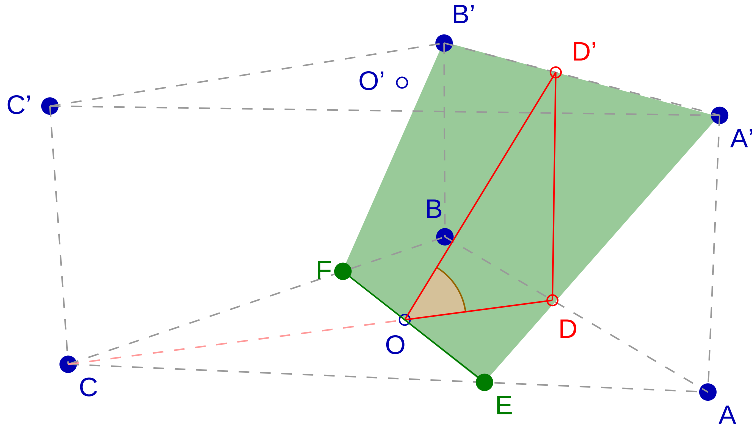

Figura 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Cum baza ABC este triunghi echilateral, are aria $\dfrac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Atunci volumul prismei este

$$V = \text{Aria}_{ABC} \cdot AA' = 36\sqrt{3} \cdot 5 = \boxed{180\sqrt{3}}$$

c. Fie D mijlocul segmentului AB, iar D' mijlocul segmentului $A'B'$. Cum triunghiul ABC este echilateral, mediana CD este şi înălţime, deci $CD \perp AB$. Punctul O se află pe CD, deci $OD \perp AB$. Cum $AA' \perp (ABC)$, rezultă $AA' \perp OD$. Din $OD \perp AB$ şi $OD \perp AA'$ rezultă că $OD \perp (AA'B'B)$. Mai observăm că linia mijlocie DD' este paralelă cu AA', deci este perpendiculară pe $A'B'$.
Deoarece $OD \perp (AA'B'B)$ şi $DD' \perp A'B'$, conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $OD' \perp A'B'$. Deci distanţa căutată este lungimea segmentului OD'.

Cum OD este apotema triunghiului echilateral ABC, avem $OD = \dfrac{AB \cdot \sqrt{3}}{6} = \dfrac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$. Folosind teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic ODD', avem

$$OD' = \sqrt{OD^2 + D'D^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 5^2} = \boxed{\sqrt{37}}$$

d. Fie EF intersecţia planelor (ABC) şi $A'B'O$, unde E este punct pe AC, iar F este punct pe BC. Cum $A'B' \| (ABC)$, rezultă $A'B' \| EF$. De aici, $EF \| AB$ ceea ce implică $OD \perp EF$ şi $OD' \perp EF$. Unghiul dintre planele $(A'B'O)$ şi (ABC) este atunci $\widehat{D'OD}$. Avem $\operatorname{tg} \widehat{D'OD} = \dfrac{DD'}{OD} = \dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{5\sqrt{3}}{6}}$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA EXAMEN.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE LICEU.