BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 81–85

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 81

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $14 + 6 \cdot 3 = 14 + 18 = \boxed{32}$
2. Numărul divizibil cu 5 este $\boxed{505}$.
3. Dintre numerele $a = 3,71$ şi $b = 3,(71) = 3,717171..$ mai mare este numărul $\boxed{b}$.
4. Dacă $A = \{0, 1, 2\}$ şi $B = \{2, 3\}$, atunci $A \cap B = \boxed{\{2\}}$.
5. Două unghiuri suplementare au suma egală cu $180°$, deci suplementul unghiului cu măsura de $120°$ este unghiul cu măsura $180° - 120° = \boxed{60°}$.
6. Dacă b şi B sunt lungimile bazelor trapezului şi h înălţimea trapezului, atunci aria trapezului este egală cu $\frac{(B+b)}{2} \cdot h$. Din ipoteză, linia mijlocie a trapezului, care este egală cu $\frac{B+b}{2}$, are lungimea de 12 cm. Deci $\frac{B+b}{2} = 12$. Prin urmare, aria trapezului este egală cu $12 \cdot 5 = \boxed{60}\,\mathrm{cm}^2$.
7. Volumul unei prisme drepte este egal cu $A_{\text{bazei}} \cdot h = 2^2 \cdot 6 = \boxed{24}\,\mathrm{cm}^3$.
8. Dacă diametrul bazei cilindrului este de 8 cm, raza bazei este egală cu $\frac{8}{2} = 4$ cm. Aria laterală a cilindrului este egală cu $2\pi rg = 2\pi \cdot 4 \cdot 7 = \boxed{56\pi}\,\mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Dacă lucrarea este terminată de 10 muncitori în 6 zile, atunci un singur muncitor ar termina în $10 \cdot 6 = 60$ zile. Deci 15 muncitori vor termina lucrarea în $\frac{60}{15} = 4$ zile.
10. $\boxed{D}$: Inecuaţia $2(x + 3) + 1 < 13$ este echivalentă cu $2x + 6 + 1 < 13$, sau $2x < 13 - 6 - 1$. Avem deci $2x < 6$, de unde $x < \frac{6}{2}$, sau $x < 3$. Mulţimea soluţiilor naturale ale inecuaţiei date este $(-\infty, 3) \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$
11. $\boxed{B}$: Fie a lungimea laturii triunghiului echilateral. Aria triunghiului echilateral este dată de formula $\frac{a \cdot a \cdot \sin 60°}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Relaţia $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ este

echivalentă cu $\frac{a^2}{4} = 9$, de unde $a^2 = 4 \cdot 9$, deci $a = 2 \cdot 3 = 6$ cm. Prin urmare, perimetrul triunghiului este egal cu $3 \cdot 6 = 18$ cm.

12. $\boxed{D}$: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu $360°$. Deci avem $2x + 4x + 6x + 8x = 360°$, ceea ce este echivalent cu $20x = 360°$. De aici $x = \frac{360}{20} = 18°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Faptul că a, b, c sunt direct proporţionale cu 2, 3, respectiv 5, revine la $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, de unde rezultă că $\frac{a}{c} = \frac{2}{5} = 0,4 = \frac{40}{100}$. Deci numărul a reprezintă $\boxed{40\%}$ din numărul c.

b. Notând $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k$, observăm că $k > 0$. Rezultă $a = 2k$, $b = 3k$ şi $c = 5k$. Înlocuind în relaţia $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 56$ obţinem $(2k-3k)^2 + (3k-5k)^2 + (5k-2k)^2 = 56$, ceea ce este echivalent cu $k^2 + 4k^2 + 9k^2 = 56$, sau $14k^2 = 56$. De aici $k^2 = \frac{56}{14} = 4$, iar $k = 2$. Prin urmare, $a = \boxed{4}$, $b = \boxed{6}$ şi $c = \boxed{10}$.

14. a. Avem

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}-1) &= [2\sqrt{2}+1][2(\sqrt{2}-1)+1] \\ &= (2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1) \\ &= (2\sqrt{2})^2 - 1^2 = 8 - 1 = \boxed{7} \end{aligned}$$

b.

c. Simplificăm mai întâi suma $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n) = (2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+(2\cdot3+1)+...+(2n+1) = (2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+...+2n)+(1+1+1+...+1) = 2(1+2+3+..+n)+n = 2\frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n$ ▼[detalii]

Am folosit faptul că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\sqrt{[f(1)+f(2)+...+f(n)] - 2n} = \sqrt{n^2+2n-2n} = n \in \mathbb{N}$$

15. a.

b. Notăm cu ABC secţiunea axială în con, unde A este vârful conului, B şi C sunt puncte diametral opuse în cercul care este baza conului, iar O centrul cercului de bază. Atunci $AB = AC$ şi AO este înălţimea conului.

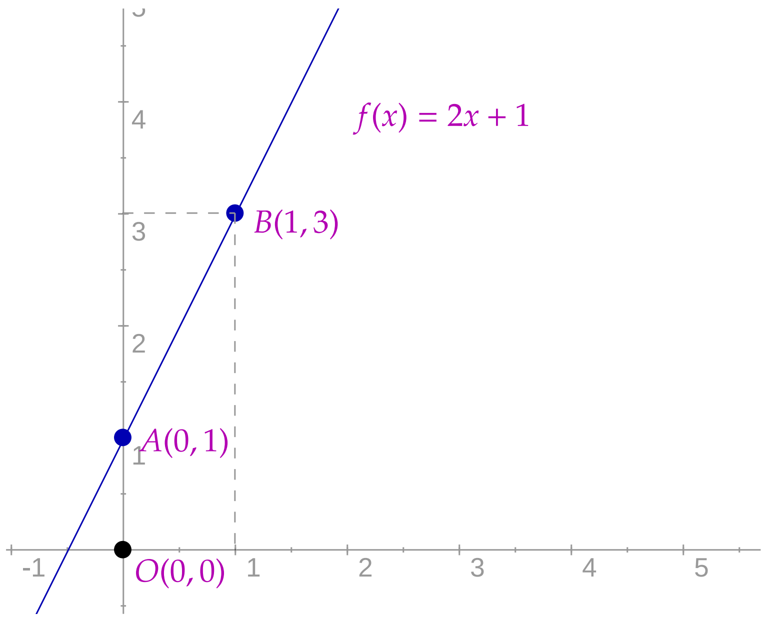

FIGURA 1. Exerciţiul 14. Graficul funcţiei trece prin punctele de coordonate $(0,1)$ şi $(1,3)$.

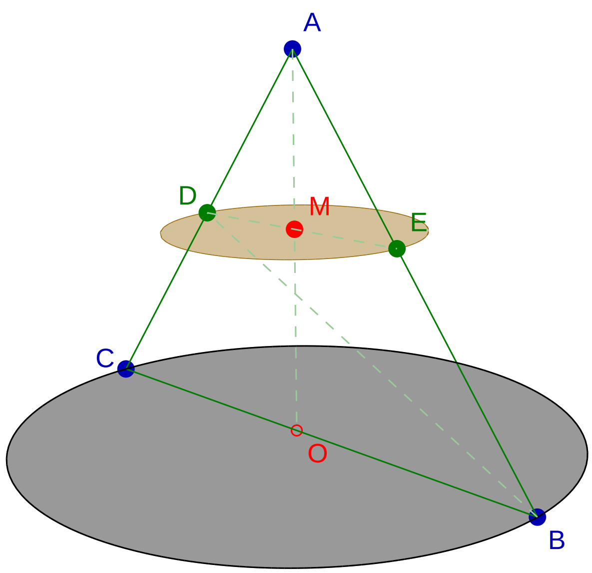

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

Din ipoteză, $32\ cm = AB + AC + BC = 2AB + 2BO$, deci

$$AB + BO = 16 \qquad (1)$$

În triunghiul dreptunghic AOB avem $0,6 = \cos\widehat{ABO} = \frac{BO}{AB}$, de unde $AB = \frac{BO}{0,6} = \frac{BO}{\frac{6}{10}} = \frac{5BO}{3}$. Substituind în relaţia (1) avem $\frac{5BO}{3} + BO = 16$ ceea ce este echivalent cu $5BO + 3BO = 48$, sau $8BO = 48$, de unde $BO = \frac{48}{8} = 6$ cm.

c. Am văzut la punctul precedent că $AB = \frac{5BO}{3}$ şi $BO = 6$ cm, de unde $AB = \frac{5 \cdot 6}{3} = 10$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AOB avem $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\ cm$. Prin urmare, $V_{con} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = 12 \cdot 8\pi = \boxed{96\pi}\ \mathrm{cm}^3$.

d. Fie $DE \| BC$, cu $E \in AB$ şi $AO \cap DE = \{M\}$. Cum BD este bisectoarea unghiului $\widehat{CBE}$ rezultă că $\widehat{EBD} = \widehat{CBD}$. De asemenea din $ED \| BC$, deducem că unghiurile $\widehat{CBD}$ şi $\widehat{EDB}$ sunt congruente ca alterne interne. Din $\widehat{EBD} = \widehat{CBD}$ şi $\widehat{CBD} = \widehat{EDB}$ rezultă că $\widehat{EBD} = \widehat{DBC}$, deci triunghiul EBD este isocel cu $EB = ED$.
Raza bazei mici a trunchiului de con este EM. Notăm lungimea acesteia cu r. Din $EM \| BO$ conform teoremei fundamentale a asemănării rezultă că triunghiurile AME şi AOB sunt asemenea, de unde avem $\frac{EM}{BO} = \frac{AE}{AB}$.
Înlocuind $AE = AB - BE = AB - ED = 10 - 2r$ obţinem $\frac{r}{6} = \frac{10 - 2r}{10}$ ceea ce este echivalent cu $5r = 30 - 6r$, sau $11r = 30$. Obţinem $r = \frac{30}{11}$.
Atunci aria laterală a trunchiului de con este
$A_l = \pi \cdot G(R + r) = \pi \cdot BE(BO + EM) = \pi \cdot \frac{60}{11}\left(6 + \frac{30}{11}\right) = \pi \cdot \frac{60}{11} \cdot \frac{96}{11} = \boxed{\frac{5760\pi}{121}}\ cm^2$.

CAPITOLUL 2

Varianta 82

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $37 \cdot 4 = \boxed{148}$
2. Dintre numerele $x = 52,34$ şi $y = 51,45$ mai mic este numărul $\boxed{y = 51,45}$.
3. Inecuaţia $x + 2 \leq 2$ este echivalentă cu $x \leq 2 - 2 = 0$. Deci $x \in (-\infty, 0] \cap \mathbb{N} = \boxed{\{0\}}$.
4. Dacă $A = \{1,2,3\}$ şi $B = \{1,3,4\}$, atunci $A \cup B = \boxed{\{1,2,3,4\}}$.
5. Un divizor al numărului 17 este $\boxed{17}$.
6. Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este $180° \cdot (n-2)$. In particular suma măsurilor unghiurilor unui hexagon regulat este egală cu $180° \cdot (6-2) = \boxed{720°}$.
7. Dacă l este lungimea laturii bazei piramidei şi a_p lungimea apotemei piramidei, atunci $A_l = 3 \cdot A_{\text{feţe}} = 3 \cdot \dfrac{l \cdot a_p}{2} = 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 4}{2} = \boxed{60}\,\text{cm}^2$.
8. $V_{\text{sferă}} = \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 6^3}{3} = 4 \cdot 36 \cdot 2\pi = \boxed{288\pi}\,\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Din $x^2 = 4$ rezultă că x ia una din valorile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 2$, iar din $y^2 = 16$, rezultă că y ia una din valorile $y_1 = -4$ şi $y_2 = 4$. Cea mai mică valoare a lui $x - y$ se obţine pentru $x = -2$ şi $y = 4$ şi este egală cu $x - y = -2 - 4 = -6$.
10. $\boxed{C}$: Faptul că 25% din a este 10 revine la $\dfrac{25}{100}a = 10$, ceea ce este echivalent cu $\dfrac{a}{4} = 10$, de unde $a = 4 \cdot 10 = 40$.
11. $\boxed{B}$: Cum $ABCD$ este patrulater incriptibil, suma unghiurilor opuse este de $180°$. In particular, $m(\widehat{ADC}) = 180° - m(\widehat{ABC}) = 180° - 90° = 90°$.
12. $\boxed{C}$: Cum triunghiurile AOB, BOC, COD şi AOD sunt triunghiuri dreptunghice congruente, aria fiecăruia din ele este un sfert din aria pătratului. Deci $A_{COD} = \dfrac{A_{ABCD}}{4} = \dfrac{8^2}{4} = \dfrac{64}{4} = 16\,\text{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Avem $\overline{ab} = 10a + b$ şi $\overline{bc} = 10b + c$, cu $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$, $a \neq 0$ şi $b \neq 0$. Faptul că $\overline{ab}$ şi $\overline{bc}$ sunt direct proporţionale cu 5 şi 3 revine la $\frac{10a+b}{5} = \frac{10b+c}{3}$. Aducând la acelaşi numitor avem $30a + 3b = 50b + 5c$, ceea ce este echivalent cu $30a - 5c = 50b - 3b$, sau cu

$$5(6a - c) = 47b \qquad (1)$$

Cum c.m.m.d.c$(5, 47) = 1$, rezultă că 5 divide pe b. Dar $b \in \{1, 2, 3, ..9\}$, deci $b = 5$.

b. Înlocuind $b = 5$ în relaţia (1) avem $5(6a-c) = 47 \cdot 5$ echivalent cu $6a-c = 47$ sau $6a = 47+c$. Membrul stâng este multiplu de 6, deci şi membrul drept $47 + c = 42 + (5 + c)$ trebuie să fie multiplu de 6. Or aceasta revine la $5 + c$ multiplu de 6, adică $c \in \{1, 7\}$.
Pentru $c = 1$, obţinem $6a = 48$, de unde $a = 8$.
Pentru $c = 7$, obţinem $6a = 54$, de unde $a = 9$.
Astfel numerele de forma $\overline{ab}$ şi $\overline{bc}$ care îndeplinesc condiţia din enunţ sunt $\boxed{(85, 51)}$ şi $\boxed{(95, 57)}$.

14. a. $f(x) \cdot g(x) = (x + 2)(x + 4) = x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 6x + 8$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

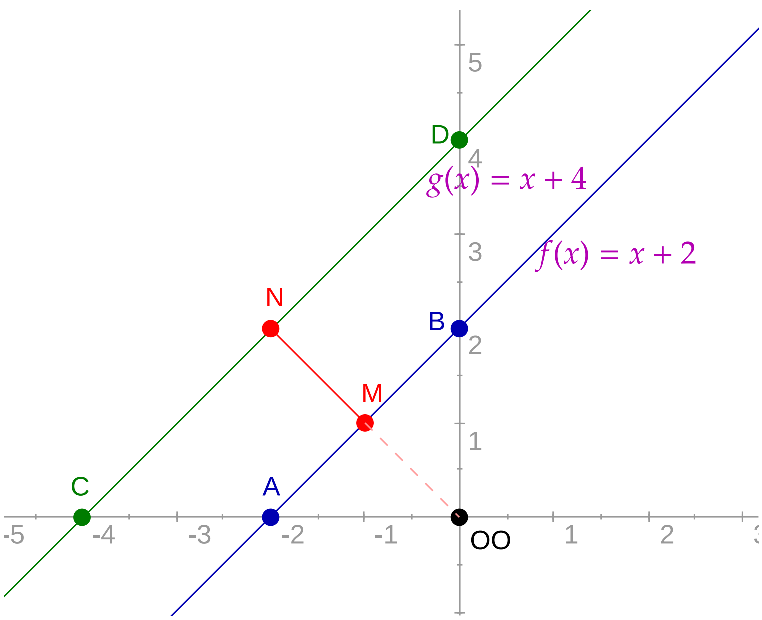

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Dreptele care sunt reprezentările grafice ale funcţiilor f, respectiv g sunt drepte paralele. Prin urmare distanţa de la orice punct M situat pe graficul funcţiei f la graficul funcţiei g este constantă şi este egală cu distanţa între cele două drepte paralele. Fie $\{A\} = G_f \cap Ox$, $\{B\} = G_f \cap Oy$, $\{C\} = G_g \cap Ox$ şi $\{D\} = G_g \cap Oy$, unde G_f reprezintă graficul funcţiei f, iar G_g graficul funcţiei g. Dacă N este piciorul perpendicularei din O pe CD şi $\{M\} = ON \cap AB$, atunci distanţa dintre dreptele AB şi CD este distanţa $MN = ON - OM$. Din $AO = OB = 2$ rezultă că triunghiul AOB este dreptunghic isoscel şi deci $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{ABO}) = 45°$. În triunghiul dreptunghic AMO avem $\sin\widehat{MAO} = \dfrac{MO}{AO}$, de unde $MO = AO \cdot \sin 45° = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Similar, din $OC = OD = 4$ rezultă că triunghiul COD este dreptunghic isoscel şi deci $m(\widehat{DCO}) = m(\widehat{CDO}) = 45°$. În triunghiul dreptunghic CNO avem $\sin\widehat{NCO} = \dfrac{NO}{CO}$, de unde $NO = CO \cdot \sin 45° = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Prin urmare $MN = ON - OM = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}}$.

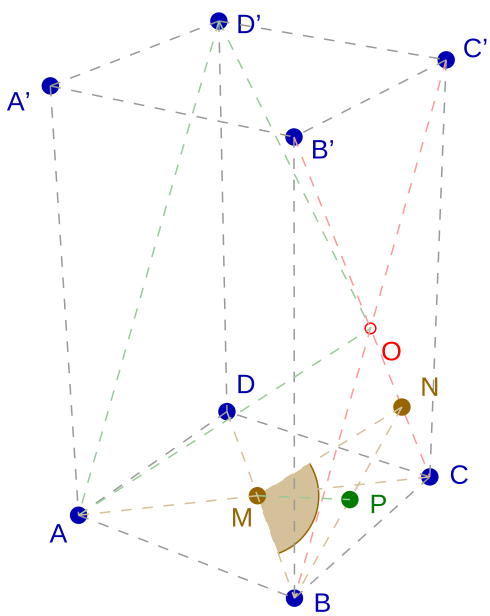

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BCC': $BC' = \sqrt{CC'^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$ cm. Deci $C'O = \dfrac{BC'}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ cm.

Din $D'C' \perp (BCC'B')$ şi $BC' \in (BCC'B')$ rezultă că $D'C' \perp BC'$. Conform teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic $OC'D'$ avem $D'O = \sqrt{D'C'^2 + OC'^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm.

c. Din $AB = D'C'$, $OB = OC'$ şi $\widehat{ABO} = \widehat{D'C'O}$ conform cazului de congruenţa L.U.L. a triunghiurilor, rezultă că triunghiurile ABO şi $D'C'O$ sunt congruente, de unde rezultă că $AO = D'O = 2\sqrt{2}$ cm. Lungimile laturilor triunghiului AOD' sunt 4, $2\sqrt{2}$ şi $2\sqrt{2}$. Cum $4^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$ (căci $16 = 8+8$), rezultă conform reciprocei teoremei lui Pitagora că triunghiul AOD' este dreptunghic cu unghiul drept $\widehat{AOD'}$.

d. Fie $AC \cap BD = \{M\}$ şi N mijlocul lui OC. În triunghiul ACO, segmentul MN este linie mijlocie, deci $MN \| AO$. Din $MN \| AO$ şi $B'D' \| BD$, rezultă că unghiul dintre AO şi $B'D'$ este unghiul $\widehat{NMB}$. Cum MN este linie mijlocie în triunghiul ACO, avem şi $MN = \frac{AO}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ cm. Deci $MB = MN = \sqrt{2}$, de unde deducem că triunghiul MBN este isoscel. În triunghiul echilateral OBC (căci $OB = OC = BC = 2$ cm), BN este mediană, deci şi înălţime. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BNC avem $BN = \sqrt{BC^2 - NC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm. Fie P proiecţia lui M pe BN. Cum triunghiul MBN este isocel, înălţimea MP este şi mediană, deci P este mijlocul lui BN şi $BP = \frac{BN}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MPB avem $MP = \sqrt{MB^2 - BP^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

Calculând aria triunghiului MBN în două moduri, avem

$$\frac{MB \cdot MN \cdot \sin \widehat{BMN}}{2} = \frac{MP \cdot BN}{2}$$

De aici $\sin \widehat{BMN} = \frac{MP \cdot BN}{MB \cdot MN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{4}}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 83

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3 \cdot 7 - 4 = 21 - 4 = \boxed{17}$
2. $\frac{40}{100} \cdot 20 = \boxed{8}$
3. Cum $74 = 14 \cdot 5 + 4$, câtul împărţirii cu rest a numărului 74 la 14 este egal cu $\boxed{5}$.
4. Ecuaţia $2x - 1 = 3$ este echivalentă cu $2x = 4$, de unde $x = \frac{4}{2} = \boxed{2}$.
5. Ştim că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu $180°$, deci al treilea unghi al triunghiului va avea măsura egală cu
$$180° - (27° + 79°) = 180° - 106° = \boxed{74°}$$
6. Diagonala AD este diametru în cercul circumscris hexagonului regulat $ABCDEF$. Cum latura hexagonului regulat este egală cu raza cercului circumscris hexagonului, $AD = 2AB = 2 \cdot 7 = \boxed{14}$ cm.
7. $A_{\text{sferei}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = \boxed{36}\pi\,\text{cm}^2$.
8. $V_{\text{cub}} = 5^3 = \boxed{125}\,\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Cubul are 6 feţe şi piramida triunghiulară 4 feţe. Dacă am avea 10 piramide (răspuns A) triunghiulare, asta însemnă că avem $10 \cdot 4 = 40$ feţe, iar restul de $58 - 40 = 18$ feţe provin de la cuburi. Cum 18 se divide la 6 (numărul feţelor cubului), inseamnă că avem pe lângă cele 10 piramide şi 3 cuburi. Deci este posibil să avem 10 piramide. Acelaşi raţionament este valabil şi pentru 7 piramide (răspuns C) şi 4 piramide (răspuns D).

   In schimb dacă am avea 9 piramide triunghiulare (răspuns B), atunci am avea deja $9 \cdot 4 = 36$ feţe, deci restul de $58 - 36 = 22$ feţe provin de la cuburi. Dar 22 nu se împarte exact la 6. Contradicţia obţinută arată că nu putem avea 9 piramide triunghiulare.
10. $\boxed{A}$: $E(x) = 4(3x - 1) - 3(2x + 5) = 12x - 4 - 6x - 15 = 6x - 19$

11. $\boxed{D}$: Dacă a este lungimea laturii triunghiului echilateral şi r raza cercului înscris în cerc, atunci $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, de unde $a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = \frac{6\cdot 6}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$ cm. Deci perimetrul triunghiului este egal cu $3 \cdot 12\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ cm.

12. $\boxed{D}$: Fie L lungimea şi l lăţimea dreptunghiului de arie $19\ m^2$, deci $l \cdot L = 19$. Dacă şi lungimea şi lăţimea se măresc de 2 ori, dimensiunile noului dreptunghi devin $2L$ şi $2l$, iar aria lui este egală cu $2L\cdot 2l = 4Ll = 4\cdot 19 = 76\ m^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a.

$$\begin{aligned}(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2 &= (10a+b)^2 - (10b+a)^2 \\ &= [(10a+b) - (10b+a)][(10a+b) + (10b+a)] \\ &= (9a-9b)(11a+11b) = 9\cdot 11\cdot (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

Se vede acum că $(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2$ este divizibil cu 9.

b. Suma cifrelor numărului $\overline{ba}$ este $a+b$. Ipoteza că prin împărţirea numărului $\overline{ba} = 10b + a$ la $a + b$ obţinem câtul 12 şi restul 4, se traduce prin $10b + a = 4(a + b) + 12$, cu $a + b > 12$. Această relaţie este echivalentă cu $3a - 6b + 12 = 0$. Simplificând prin 3 obţinem $a = 2b - 4 = 2(b - 2)$. Deci a este o cifră pară, de unde deducem $a \in \{2, 4, 6, 8\}$. Examinăm aceste cazuri:

Pentru $a = 2$, obţinem $b = 3$. Aceste valori nu convin deoarece $a + b = 5 < 12$.

Pentru $a = 4$, obţinem $b = 4$. Aceste valori nu convin deoarece $a + b = 8 < 12$.

Pentru $a = 6$, obţinem $b = 5$. Aceste valori nu convin deoarece $a + b = 11 < 12$.

In fine, pentru $a = 8$, obţinem $b = 6$ şi cum $a + b = 14 > 12$, rezultă că numărul $\overline{ab}$ este egal cu $\boxed{86}$.

14. a. Media geometrică a numerelor x şi y este

$$\sqrt{xy} = \sqrt{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 7^2} = \sqrt{50-49} = \boxed{1}$$

b. Ştim de la punctul (a) că $xy = 1$, deci $x = \frac{1}{y}$. Inegalitatea $x < \frac{1}{14}$, este atunci echivalentă cu $14 < y = 5\sqrt{2} + 7$, sau $7 < 5\sqrt{2}$. Prin ridicare la pătrat această inegalitate este echivalentă cu $49 < 50$, care este evident adevărată.

c. Folosind repetat faptul că $xy = 1$ avem $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = \frac{x^4 + y^4}{x^4y^4} = x^4 + y^4 = (x^4 + y^4 + 2x^2y^2) - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2 = [(10\sqrt{2})^2 - 2]^2 - 2 = [200 - 2]^2 - 2 = 198^2 - 2 \in \mathbb{N}$.

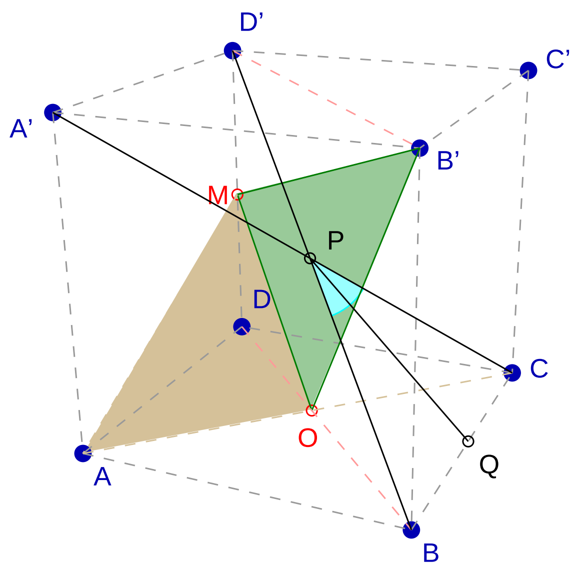

FIGURA 1. Exercițiul 15.

15. a.

b. **Prima rezolvare.** Calculăm mai întâi lungimile laturilor triunghiului $B'MO$. Cum BD este diagonala pătratului de latură 4 cm, lungimea lui BD este $4\sqrt{2}$ cm, iar O este mijlocul lui BD, deci $BO = \frac{BD}{2} = 2\sqrt{2}$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $B'BO$ avem $B'O = \sqrt{BB'^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 8} = 2\sqrt{6}$ cm. În triunghiul dreptunghic MDO conform teoremei lui Pitagora avem $MO = \sqrt{MD^2 + DO^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 8} = 2\sqrt{3}$ cm. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $MD'B'$ avem $MB' = \sqrt{MD'^2 + B'D'^2} = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 + 32} = \sqrt{36} = 6$ cm. Prin urmare, lungimile laturilor triunghiului $B'MO$ sunt $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$ și 6. Cum $(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 6^2$ (căci $24 + 12 = 36$), conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul $B'MO$ este dreptunghic în O. Aria lui $B'MO$ este deci egală cu $\frac{MO \cdot OB'}{2} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \boxed{6\sqrt{2}}\ \mathrm{cm}^2$.

A doua rezolvare. Aria triunghiului MOB' este aria dreptunghiului $BB'D'D$ din care scadem suma ariilor triunghiurilor dreptunghice BOB', MDO și

$MB'D'$.

$$\begin{aligned}
\text{Aria}_{BB'D'D} &= BD \cdot BB' = 4\sqrt{2} \cdot 4 = 16\sqrt{2} \\
\text{Aria}_{BOB'} &= \frac{BB' \cdot BO}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \\
\text{Aria}_{MOD} &= \frac{DO \cdot MD}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{2} \\
\text{Aria}_{MB'D'} &= \frac{B'D' \cdot MD'}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 2}{2} = 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Deci $\text{Aria}_{MB'O} = 16\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \boxed{6\sqrt{2}}$.

c. Cum $BB' \perp (ABCD)$ şi $AO \subset (ABCD)$, rezultă că $AO \perp BB'$. Din $AO \perp BB'$ şi $AO \perp BD$ (diagonalele pătratului sunt perpendiculare) rezultă că $AO \perp (DBB'D')$, deci $AO \perp (MB'O)$. Ştim că dacă un plan conţine o dreaptă perpendiculară pe un alt plan atunci cele două plane sunt perpendiculare, deci din $AO \perp (MB'O)$ şi $AO \subset (AOM)$ rezultă că $(AOM) \perp (MB'O)$.

d. MO este linie mijlocie în triunghiul $D'DB$, deci $MO || BD'$. Atunci unghiul dintre MO şi $A'C$ este egal cu unghiul dintre BD' şi $A'C$, adică unghiul $\widehat{BPC}$, unde $\{P\} = A'C \cap BD'$. Deoarece BD' şi $A'C$ sunt diagonalele cubului de latură 4 cm, avem $A'C = BD' = 4\sqrt{3}$ cm. Punctul P este mijlocul lui $A'B$ şi $A'C$, deci $BP = PC = 2\sqrt{3}\ cm$. Fie Q piciorul perpendicularei din P pe BC. În triunghiul dreptunghic PQB aplicând teorema lui Pitagora avem $PQ = \sqrt{PB^2 - BQ^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = \sqrt{12 - 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm. Scriind aria triunghiului BPC în două moduri avem

$$\frac{PQ \cdot BC}{2} = \frac{BP \cdot PC \cdot \sin \widehat{BPC}}{2}$$

De aici $\sin \widehat{BPC} = \dfrac{PQ \cdot BC}{BP \cdot PC} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot 4}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

CAPITOLUL 4

Varianta 84

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $(12-2)+4=10+4=\boxed{14}$
2. Media geometrică a numerelor 2 şi 8 este egală cu $\sqrt{2\cdot 8}=\boxed{4}$.
3. Soluţia ecuaţiei $2x=10$ este $x=\dfrac{10}{2}=\boxed{5}$.
4. Dacă $A=\{1,2,3\}$ şi $B=\{3,4\}$, atunci $A\cap B=\boxed{\{3\}}$.
5. Cum o oră are 60 de minute, 5 ore sunt egale cu $5\cdot 60=\boxed{300}$ minute.
6. Lăţimea fiind o doime din lungime, este egală cu $\dfrac{14}{2}=\boxed{7}$.
7. Cum $HG\|CD$, unghiul dintre HG şi AC este unghiul dintre CD şi AC adică $\widehat{ACD}$ a cărui măsura este egală cu $\boxed{45^\circ}$.
8. Fie $ABCDEFGH$ prisma dreaptă cu baza pătrat. Calculăm înălţimea AE a prismei aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABE:
$$AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=\boxed{4}\,\text{cm}$$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Pentru $x=1-a$ şi $y=1+a$ avem $(x+y-1)^{2007}=(1-a+1+a-1)^{2007}=1^{2007}=1$.
10. $\boxed{C}$: Fie $M(a,b)$ punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor f şi g. Avem deci relaţiile $b=2-3a\quad(1)$ şi $b=2a-3\quad(2)$. Înlocuind b din relaţia (1) în relaţia (2) avem $2-3a=2a-3$ ceea ce este echivalent cu $2+3=2a+3a$ sau cu $5a=5$, de unde $a=\dfrac{5}{5}=1$, iar $b=2-3=-1$. Prin urmare, punctul de intersecţie al graficelor funcţiilor f şi g este $M(1,-1)$.
11. $\boxed{B}$: Notând cu a, b, c măsurile unghiurilor triunghiului, avem $a+b+c=180^\circ\quad(1)$ şi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}$. Notând cu k valoarea comună a acestor rapoarte, avem $a=k$, $b=2k$ şi $c=3k$. Înlocuind în relaţia (1) obţinem $k+2k+3k=180^\circ$, echivalent cu $6k=180^\circ$, de unde $k=\dfrac{180^\circ}{6}=30^\circ$. Prin urmare $c=3k=3\cdot 30^\circ=90^\circ$, deci triunghiul este dreptunghic.

12. $\boxed{D}$: Cum diagonala mică are lungimea $4\ cm$, diagonala mare a rombului fiind dublul diagonalei mici, are lungimea $2 \cdot 4 = 8\ cm$. Aria rombului este jumătate din produsul diagonalelor, adică $\dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16\,\text{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Dacă 18 elevi participă la olimpiada de matematică şi 15 elevi participă la olimpiada de fizică atunci $18 + 15 = 33$ elevi participă la olimpiada de matematică sau fizică. Cum în clasă sunt 27 de elevi, $33 - 27 = \boxed{6}$ elevi participă şi la olimpiada de matematică şi la cea de fizică.

 b. Cum din cei 18 elevi care participă la olimpiada de matematică, 6 participă şi la olimpiada de fizică, rezultă că $18 - 6 = \boxed{12}$ elevi participă numai la cea de matematică.

14. a. Pentru $m = 2$ ecuaţia devine $x^2+2(2+1)x+2^2+2-1 = 0$, adică $x^2+6x+5 = 0$. Discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi este $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$, iar $x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{16}}{2} = \dfrac{-6-4}{2} = \boxed{-5}$ şi $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{-6+4}{2} = \boxed{-1}$.

 b. Dacă $x = -m$ este soluţie ecuaţiei, atunci $(-m)^2 + 2(m+1)(-m) + m^2 + m - 1 = 0$. Efectuând calculele obţinem $m^2 - 2m^2 - 2m + m^2 + m - 1 = 0$, sau $-m - 1 = 0$, de unde $\boxed{m = -1}$.

 c. Ecuaţia de gradul doi are două soluţii reale diferite dacă şi numai dacă $\Delta > 0$. Avem $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m^2+m-1) = 4m^2+8m+4-4m^2-4m+4 = 4m+8$, deci condiţia $\Delta > 0$ revine la $4m > -8$ sau $m > -2$. Deci pentru $\boxed{m \in (-2, \infty)}$, ecuaţia are două soluţii reale distincte.

15. a.

 b. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VAB (din ipoteză $VA \perp VB$), avem $AB^2 = VA^2 + VB^2$. Dar $VA = VB$, deci $VA^2 = \dfrac{AB^2}{2}$ şi astfel $VA = \sqrt{\dfrac{AB^2}{2}} = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}\ cm$.

 Din $VA = VB$, VC latură comună şi $\widehat{AVC} = \widehat{BVC} = 90°$, conform cazului de congruenţa L.U.L. rezultă că triunghiurile VAC şi VBC sunt congruente, deci $AC = BC$. Similar arătăm că triunghiurile VAB şi VBC sunt congruente, deci $AB = BC$. Astfel $AB = BC = AC$. Fie VO înălţimea conului. Atunci AO, BO, CO sunt raze în cercul circumscris triunghiului echilateral ABC a cărui latură are lungimea de $18\ cm$. Atunci $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}\ cm$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul

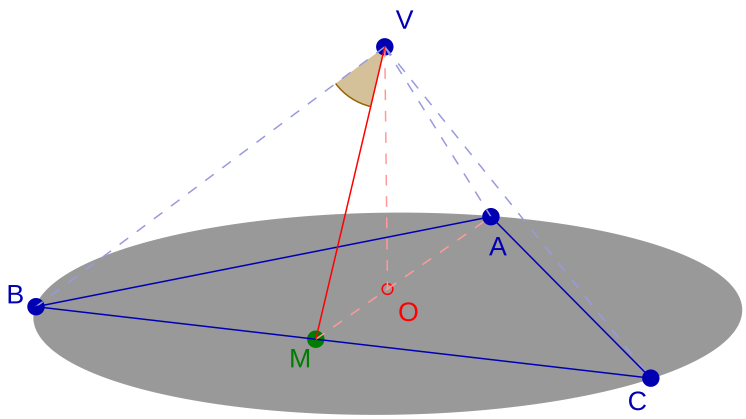

FIGURA 1. Exercițiul 15.

dreptunghic VOA avem $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 - (6\sqrt{3})^2} = \sqrt{81 \cdot 2 - 36 \cdot 3} = \sqrt{162 - 108} = \sqrt{54} = \boxed{3\sqrt{6}}\ cm$.

c. $V_{con} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot AO^2 \cdot VO}{3} = \dfrac{\pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 3\sqrt{6}}{3} = \pi \cdot 36 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = \boxed{108\pi\sqrt{6}}\ cm^3$.

d. Din $VA \perp VC$ şi $VA \perp VB$ rezultă că $VA \perp (VBC)$. Cum $VA \perp (VBC)$ şi $VM \subset (VBC)$ avem că $VA \perp VM$. Din $VM \perp VA$ şi $VB \perp VA$ rezultă că unghiul planelor (AVM) şi (AVB) este unghiul $\widehat{BVM}$. În triunghiul dreptunghic isocel VBC ($VB = VC$), VM este mediană, deci şi bisectoare. Cum $\widehat{BVM} = \widehat{CVM}$ şi $\widehat{BVC} = 90°$, rezultă că $\widehat{BVM} = \dfrac{\widehat{BVC}}{2} = \dfrac{90°}{2} = \boxed{45°}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 85

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. Dintre numerele 301,405 şi 502 cel divizibil cu 3 este $\boxed{405}$, deoarece suma cifrelor sale $4+0+5=9$ este divizibilă cu 3.
2. Rădăcina pătrată a numărului 64 este 8, deoarece $8^2=64$.
3. Dacă suma a două numere este 30, iar unul dintre numere este 18, atunci al doilea număr este egal cu $30-18=\boxed{12}$.
4. $2\ dm^3 = 2\ litri$
5. Suma unghiurilor ascuţite ale triunghiului isocel cu un unghi de măsură $100°$ este egală cu $180°-100°=80°$. Cum cele două unghiuri ascuţite sunt egale (nu putem avea două unghiuri de $100°$), unul are măsura egală cu $\dfrac{80°}{2}=\boxed{40°}$.
6. Dacă $ABCD$ este un romb şi E este proiecţia lui A pe BC, atunci aria rombului este egală cu $BC\cdot AE$. Avem deci relaţia $BC\cdot AE=40$, de unde înălţimea $AE=\dfrac{40}{BC}=\dfrac{40}{10}=\boxed{4}$ cm.
7. $A_l=2\pi\cdot r\cdot g$, de unde $r=\dfrac{A_l}{2\pi\cdot g}=\dfrac{200\pi}{2\pi\cdot 4}=\boxed{25}\ dm$.
8. $A_t=6\cdot A_{\text{feţei}}=6\cdot 6=\boxed{36}\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Discriminantul ecuaţia de gradul doi $3x^2-x-4=0$ este $\Delta=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-4)=1+48=49$, iar $x_1=\dfrac{1+7}{2\cdot 3}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$ şi $x_2=\dfrac{1-7}{2\cdot 3}=\dfrac{-6}{6}=-1$.
10. $\boxed{A}$: $3\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}-2\frac{1}{2}=\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=\frac{11}{2}-\frac{5}{2}=\frac{6}{2}=3$
11. $\boxed{C}$: Fie AB segmentul care face cu planul dat un unghi de $30°$ şi fie C proiecţia lui B pe plan; deci proiecţia segmentului AB pe plan este segmentul AC. În triunghiul dreptunghic ACB avem $\cos 30°=\dfrac{AC}{AB}$, de unde $AC=AB\cos 30°=6\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\ cm$.

12. $\boxed{B}$: Fie $\widehat{AOB}$ unghiul la centru a cărui măsura este egală cu 30°. Dacă diametrul cercului este de $12\ cm$, raza cercului este egală cu $\frac{12}{2} = 6\ cm$. Aria sectorului de cerc AOB este egală cu $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot m(\widehat{AOB})}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} = 3\pi\ cm^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Vrem să numărăm câte numere de două cifre, pot fi scrise sub forma $\overline{xy} = 6n + 4$, cu $n \in \mathbb{N}$. Această relaţie se mai scrie $\overline{xy} - 4 = 6n$. Numerele de forma $\overline{xy} - 4$ pot lua toate valorile cuprinse între $10 - 4 = 6$ şi $99 - 4 = 95$. Printre elementele mulţimii $\{6, 7, \ldots, 94, 95\}$, numerele divizibile cu 6 sunt $6 = 6 \cdot 1,\ 12 = 6 \cdot 2, \ldots, 90 = 6 \cdot 15$, deci există $\boxed{15}$ numere ce satisfac enunţul.

b. Fia a deîmpărţitul şi b împărţitorul. Evident $a \geq b$ şi $b \neq 0$. Dacă restul împărţirii lui a la b este 6 şi câtul 4, atunci conform teoremei împărţirii cu rest avem relaţia $a = 4b + 6 \quad (1)$. Cum suma dintre deîmpărţit, cât şi împărţitor este egală cu 260, avem relaţia $a + b + 4 = 260 \quad (2)$. Înlocuind (1) în (2) avem $4b + 6 + b + 4 = 260$ ceea ce este echivalent cu $5b = 250$, de unde împărţitorul este $b = \frac{250}{5} = \boxed{50}$, iar deîmpărţitul $a = 4b + 6 = 200 + 6 = \boxed{206}$.

14. a. $a \cdot b = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 - 2} = \boxed{\sqrt{2}}$

b. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \overset{ab=\sqrt{2}}{=} (\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 = 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = \boxed{4 + 2\sqrt{2}}$

c. Avem $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 - \sqrt{2}} \overset{ab=\sqrt{2}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$. Prin urmare, $\frac{b}{a} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$.

15. a.

b. Fie M mijlocul lui BC. Calculăm lungimea apotemei DM prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DOM. Pentru aceasta avem nevoie de lungime lui OM. Cum DO este înălţimea piramidei triunghiulare regulate, O este şi centrul de greutate al triunghiul ABC, deci $OM = \frac{1}{3}AM$. Pentru a afla AM, vom calcula mai întâi lungimea laturii triunghiului echilateral ABC. Folosim formula ariei $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} =$

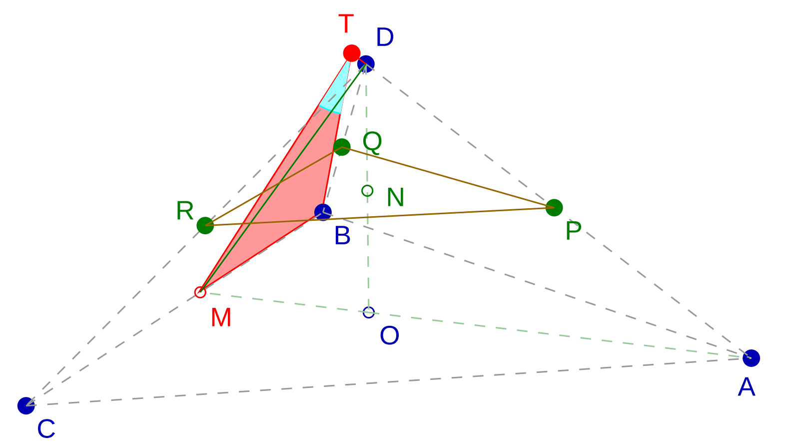

FIGURA 1. Exerciţiul 15. Atenţie! Punctul T este foarte apropiat de vârful D al piramidei.

$\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$. Din ipoteză $A_{ABC} = 27\sqrt{3}$, deci $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$. Astfel $AB^2 = 27 \cdot 4$, iar $AB = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 4} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ cm$. Ştiind acum lungimea laturii triunghiului echilateral egală cu $6\sqrt{3}$, rezultă că înălţimea triunghiului ABC este $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9\ cm$. Atunci $OM = \frac{AM}{3} = \frac{9}{3} = 3\ cm$. Aplicând acum teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DOM avem $DM = \sqrt{DO^2 + OM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\ cm$.

c. Fie PQR cu $P \in DA$, $Q \in DB$ şi $R \in DC$, planul de secţiune în piramida $DABC$ care trece prin mijlocul N al înălţimii DO şi care este paralel cu planul bazei ABC. Ştim că $NO = \frac{DO}{2} = \frac{4}{2} = 2\ cm$. Cum planul PQR este paralel cu planul bazei ABC şi trece prin mijlocul înălţimii DO, punctele P, Q, R sunt de asemenea mijloacele laturilor DA, DB, respectiv DC. Prin urmare, PQ este linie mijlocie în triunghiul DAB şi are lungimea egală cu $\frac{AB}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Atunci $A_{PQR} = \frac{PQ \cdot QR \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}\ cm^2$.

În final,

$$\begin{aligned} V_{PQRABC} &= \frac{NO(A_{PQR} + A_{ABC} + \sqrt{A_{PQR} \cdot A_{ABC}})}{3} \\ &= \frac{2\left(\frac{27\sqrt{3}}{4} + 27\sqrt{3} + \sqrt{\frac{27\sqrt{3}}{4} \cdot 27\sqrt{3}}\right)}{3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{27\sqrt{3}}{4} + 27\sqrt{3} + \frac{27\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7 \cdot 27\sqrt{3}}{4} \\ &= \boxed{\frac{63\sqrt{3}}{2}}\, cm^3 \end{aligned}$$

d. Fie T proiecţia lui M pe DA. Cum M este mijlocul lui BC şi triunghiul BCD este isocel ($DB = DC$) rezultă că mediana DM este şi înăţime, deci $DM \perp BM$. Similar, în triunghiul echilateral ABC mediana AM este şi înăţime, deci $AM \perp BM$. Din $BM \perp AM$ şi $BM \perp DM$, rezultă că $BM \perp (AMD)$. Cum $BM \perp (AMD)$, $MT \perp AD$ şi $AD \subset (AMD)$ conform teoremei celor trei perpendiculare avem că $BT \perp AD$. Cum $BT \perp AD$ şi $MT \perp AD$, rezultă că unghiul dintre planele (AMD) şi (ABD) este $\widehat{BTM}$. În triunghiul dreptunghic BMT (am văzut mai sus că $BM \perp MT$) avem $\tan \widehat{BTM} = \frac{BM}{MT}$. Aflăm MT prin calcularea ariei triunghiului AMD în două moduri. Avem $A_{AMD} = \frac{DO \cdot AM}{2} = \frac{MT \cdot DA}{2}$, de unde $MT = \frac{DO \cdot AM}{DA}$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DMB aflăm muchia laterală a piramidei : $DB = \sqrt{DM^2 + MB^2} = \sqrt{5^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 27} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\, cm$. Avem deci, $MT = \frac{4 \cdot 9}{2\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$ şi de aici

$$\tan \widehat{BTM} = \frac{BM}{MT} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{18}{\sqrt{13}}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{18} = \boxed{\frac{\sqrt{39}}{6}}$$