BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 76-80

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 76

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $6-5+3=1+3=\boxed{4}$
2. Mai mic este numărul $\boxed{b=3,6}$.
3. $\frac{80}{100}\cdot 180=8\cdot 18=\boxed{144}$
4. Media aritmetică numerelor 14 şi 4 este egală cu $\frac{14+4}{2}=\boxed{9}$.
5. $L_{cerc}=2\pi r=2\pi\cdot 3=\boxed{6}\pi\, cm$.
6. Perimetrul dreptunghiului cu lungimea $7\ cm$ şi lăţimea $4\ cm$ este egal cu $2\cdot 7+2\cdot 4=14+8=\boxed{22}\,cm$.
7. $V=\frac{1}{3}\cdot A_{bazei}\cdot h$, de unde $A_{bazei}=\frac{3V}{h}=\frac{3\cdot 48}{9}=16\,cm^2$. Cum baza este un pătrat, avem $A_{bazei}=a^2$, unde a este lungimea laturii. De aici, $a=\sqrt{16}=\boxed{4}\,cm$.
8. $A_{\text{sferă}}=4\pi\cdot r^2=4\pi\cdot 6^2=4\pi\cdot 36=\boxed{144}\pi\, cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2=2+2\sqrt{10}+5-2+2\sqrt{10}-5=4\sqrt{10}$
10. $\boxed{D}$: $E(x)=\frac{2}{x-3}-\frac{5-x}{x-3}=\frac{2-5+x}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}=1$, $\forall x\neq 3$.
11. $\boxed{C}$: Fie trapezul $ABCD$ în care AB este baza mare şi E este proiecţia lui D pe AB. Cum $m(\widehat{DAE})=45°$, triunghiul dreptunghic DEA este isocel şi $DE=AE=AB-BE=AB-DC=12-8=4\ cm$. Atunci $A_{ABCD}=\frac{(AB+DC)DE}{2}=\frac{(12+8)4}{2}=40\ cm^2$.
12. $\boxed{D}$: Dacă a este lungimea laturii triunghiului echilateral, atunci raza cercului înscris triunghiului este egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Deoarece $71 = 4 \cdot 17 + 3$, rezultă că 71 împărţit la 4 dă restul 3. Pe de altă parte $71 = 6 \cdot 11 + 5$, deci 71 împărţit la 6 dă restul 5. Deci putem spune că în pungă pot fi 71 de bomboane.

b. Căutăm cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}$ care împărţit la 4 dă restul 3, adică este de forma $n = 4p + 3$ cu $p \in \mathbb{N}$ şi care împărţit la 6 dă restul 5, adică este de forma $n = 6q + 5$, cu $q \in \mathbb{N}$. Din $n = 4p + 3$ rezultă $n + 1 = 4(p + 1)$, deci 4 divide $n + 1$. Din $n = 6q + 5$ rezultă $n + 1 = 6(q + 1)$, deci 6 divide $n + 1$. Atunci cel mai mic multiplu comun al numerelor 4 şi 6 (care este 12) îl divide pe $n + 1$. Deci $n + 1$ este de forma $12k$, cu $k \in \mathbb{N}$, de unde $n = 12k - 1$, cu $k \in \mathbb{N}$. Cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}$ de forma $12k - 1$, cu $k \in \mathbb{N}$ este $12 \cdot 1 - 1 = \boxed{11}$.

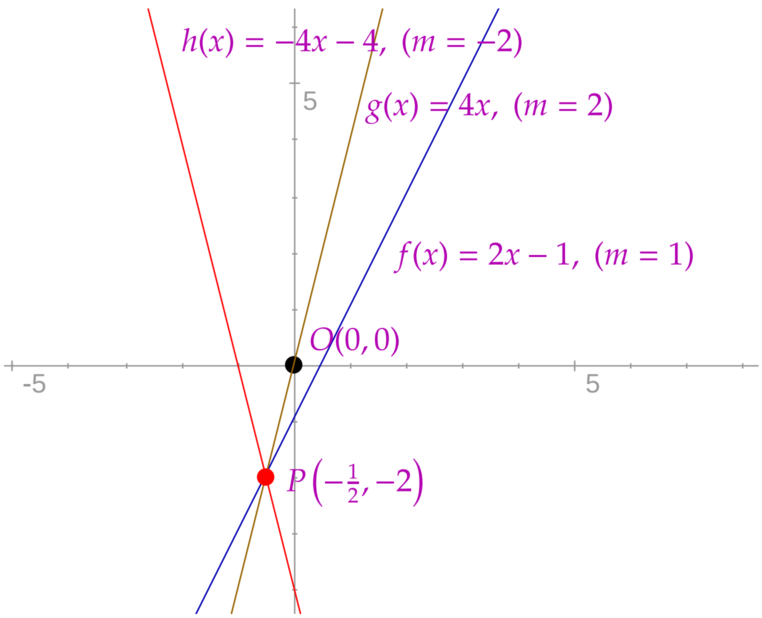

FIGURA . Exerciţiul 14.

14. a.

b. Dacă (a, b) sunt coordonatele punctului de intersecţie a reprezentărilor grafice ale funcţiilor $g(x) = 4x$ şi $h(x) = -4x - 4$, atunci avem relaţiile $g(a) = b$ şi $h(a) = b$ care sunt echivalente cu $4a = b \quad (1)$ şi $-4a - 4 = b \quad (2)$. Înlocuind b din relaţia (1) în (2) obţinem $-4a - 4 = 4a$ ceea ce este echivalent cu $8a = -4$, de unde $a = \frac{-4}{8} = \boxed{\frac{-1}{2}}$, iar $b = 4a = 4 \cdot \frac{-1}{2} = \boxed{-2}$.

c. Deoarece pentru orice $m \in \mathbb{R}$, avem $f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2m \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + m - 2 = -m + m + 2 = 2$, rezultă că punctul $P\left(\frac{-1}{2}, -2\right)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f, $\forall m \in \mathbb{R}$.

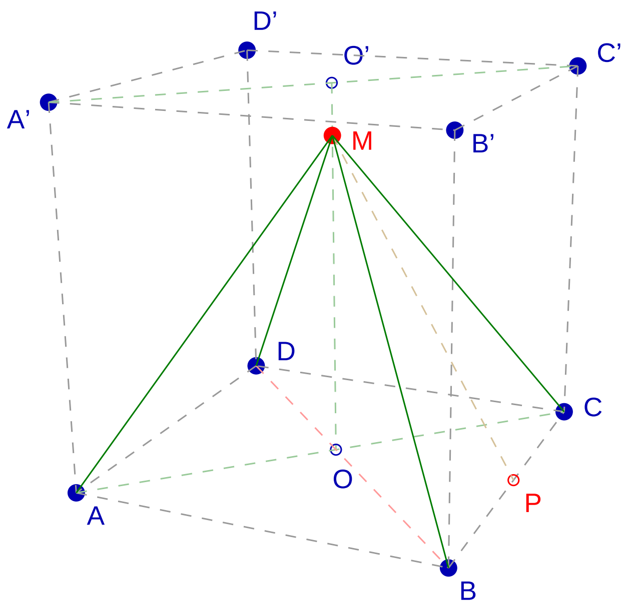

FIGURA . Exercițiul 15.

15. a.

b. Deoarece $A'C' \| AC$, unghiul dintre $A'C'$ şi BD este unghiul dintre AC şi BD, adică $\widehat{AOB}$. Cum diagonalele pătratului sunt perpendiculare avem $m(\widehat{AOB}) = \boxed{90^\circ}$.

c. Deoarece piramida $MABCD$ este piramidă patrulateră regulată rezultă că $MO \perp (ABCD)$. Cum şi $O'O \perp (ABCD)$ şi perpendiculara într-un punct pe un plan este unică rezultă că punctele O', M şi O sunt coliniare.

d. Fie P proiecţia lui M pe BC. Atunci MP este apotemă în piramida $MABCD$ şi conform ipotezei are lungimea de $6\,cm$. Cum OP este linie mijlocie în triunghiul ABC, avem $OP = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\,cm$. În triunghiul dreptunghic MOP, aplicând teorema lui Pitagora avem $MO = \sqrt{MP^2 - OP^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = \boxed{3\sqrt{3}}\,cm$.

CAPITOLUL 2

Varianta 77

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $7 \cdot 8 - 3^2 = 56 - 9 = \boxed{47}$
2. $\frac{25}{100} \cdot 100 = \boxed{25}$
3. Media aritmetică numerelor 41 şi 59 este egală cu $\frac{41+59}{2} = \frac{100}{2} = \boxed{50}$.
4. Numerele naturale pare mai mici ca 10 sunt 2, 4, 6 şi 8, iar suma lor este $2+4+6+8 = \boxed{20}$.
5. $1\,dam = 10\,m$, deci $7\,dam = \boxed{70\,m}$.
6. Aria paralelogramului este dată de produsul dintre lungimea unei laturii şi înălţimea corespunzătoare acelei laturi, adică $3 \cdot 4 = \boxed{12}\,cm^2$.
7. Volumul cilindrului este $\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = \boxed{288}\pi\,cm^3$.
8. $A_l = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 6 = 36 + 60 = \boxed{96}\,cm^2$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: $\sqrt{15} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}\right) - \sqrt{108} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = \sqrt{3}$
10. $\boxed{B}$: Dacă $A(1,1)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f, atunci $f(1) = 1$, ceea ce revine la $m - 1 + 1 = 1$, de unde $m = 1$.
11. $\boxed{C}$: Dacă perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu $16\ cm$, atunci lungimea laturii rombului este egală cu $\frac{16}{4} = 4\ cm$. Atunci $A_{romb} = 2A_{ABD} = 2 \cdot \frac{AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ}{2} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\,cm^2$.
12. $\boxed{D}$: $2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c)$

b. Cum a, b, c sunt cifre diferite, valoarea maximă a lui $a+b+c$ este $7+8+9 = 24$. Deci cea mai mare valoarea a numărului n este $111 \cdot 24 = \boxed{2664}$.

14. a. Ecuaţia $x^2 - 10x + 25 = 0$ este echivalentă cu $(x - 5)^2 = 0$, de unde $x_1 = x_2 = \boxed{5}$.

b. $p = y^2 + 4y + 5 = (y^2 + 4y + 4) + 1 = (y + 2)^2 + 1$. Cum $(y + 2)^2 \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, rezultă că $p = (y + 2)^2 + 1 > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

c. $A = \sqrt{x^2 - 10x + 29} + \sqrt{y^2 + 4y + 5} = \sqrt{(x - 5)^2 + 4} + \sqrt{(y + 2)^2 + 1}$. Cum $(x-5)^2 + 4 \geq 4$, cea mai mică valoare a sa este 4, de unde rezultă că cea mai mică valoare a lui $\sqrt{(x - 5)^2 + 4}$ este 2. Cum $(y+2)^2+1 \geq 1$, cea mai mică valoare a sa este 1, de unde rezultă că cea mai mică valoare a lui $\sqrt{(y + 2)^2 + 1}$ este 1. Deci, cea mai mică valoare a lui A este $2 + 1 = \boxed{3}$.

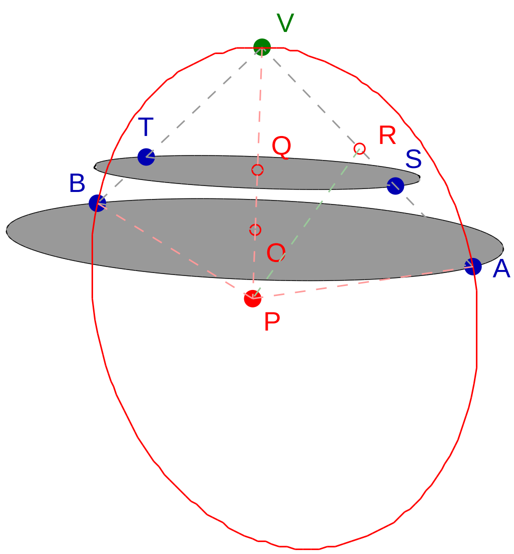

Figura . Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie VAB secţiunea axială a conului circular drept, V fiind vârful conului. Din ipoteză triunghiul VAB este isoscel şi are perimetrul egal cu $18\ cm$. Atunci $2 \cdot VA = VA + VB = 18 - 8 - 10$ şi astfel $VA = \dfrac{10}{2} = 5\ cm$. Raza bazei este $r = \dfrac{8}{2} = 4$, iar generatoarea am văzut că este $g = 5$. Deci, $A_t = \pi \cdot r(g + r) = \pi \cdot 4 \cdot (5 + 4) = \boxed{36\pi}\ cm^2$.

c. Centrul cercului circumscris unui triunghi se găseşte la intersecţia mediatoarelor laturilor triunghiului. Fie R mijlocul lui VA şi P intersecţia mediatoarelor duse în O şi R. Evident $P \in VO$ deoarece VO este mediatoarea lui AB. Din $\widehat{RVP} = \widehat{OVA}$ şi $m(\widehat{VRP}) = m(\widehat{VOA}) = 90°$, rezultă că triunghiurile VRP şi VOA sunt asemenea. Avem deci $\dfrac{VP}{AV} = \dfrac{VR}{VO}$ (1). Calculăm VO prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA: $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$. Înlocuind în relaţia (1) avem $\dfrac{VP}{5} = \dfrac{\frac{5}{2}}{3}$, de unde $VP = \dfrac{5 \cdot \frac{5}{2}}{3} = \boxed{\dfrac{25}{6}}\ cm$.

d. Fie S, T punctele de intersecţie cu VA, respectiv VB, ale planului paralel cu planul bazei conului. Dacă $Q = VO \cap ST$ atunci $VQ = \dfrac{2}{3}VO = \dfrac{2}{3} \cdot 3 = 2$, iar $QO = VO - VQ = 3 - 2 = 1\ cm$. Cum $SQ \| AO$, conform teoremei fundamentale a asemănării triunghiurile VQS şi VOA sunt asemenea şi $\dfrac{SQ}{AO} = \dfrac{VQ}{VO} = \dfrac{2}{3}$, de unde $SQ = \dfrac{AO \cdot VQ}{VO} = \dfrac{4 \cdot 2}{3} = \dfrac{8}{3}\ cm$. Prin urmare,

$$V_{\text{trunchi de con}} = \frac{\pi \cdot QO(AO^2 + SQ^2 + AO \cdot SQ)}{3} = \frac{\pi\left(4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{8}{3}\right)}{3} = \frac{\pi(16 + \frac{64}{9} + \frac{32}{3})}{3} =$$

$$\frac{\pi(16 \cdot 9 + 64 + 32 \cdot 3)}{27} = \frac{\pi(144 + 64 + 96)}{27} = \boxed{\frac{304\pi}{27}}\ cm^3.$$

CAPITOLUL 3

Varianta 78

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $427 - 328 = \boxed{99}$
2. $\dfrac{20}{100} \cdot 520 = \boxed{104}$
3. Cum o oră are 60 minute, o treime de oră are $\dfrac{1}{3} \cdot 60 = \boxed{20}$ minute.
4. Media aritmetică a celor 3 numere este $\dfrac{\text{suma numerelor}}{3} = \dfrac{24}{3} = \boxed{8}$.
5. Perimetrul triunghiului echilateral de latură $6\,textrmcm$ este egal cu $3 \cdot 6 = \boxed{18}\,\text{cm}$.
6. Cum unghiurile $\widehat{BCD}$ şi $\widehat{BAD}$ sunt opuse şi într-un paralelogram unghiurile opuse sunt congruente, rezultă că $m(\widehat{BAD}) = \boxed{30^\circ}$.
7. $A_l = 4 \cdot A_{\text{faţă laterală}} = 4 \cdot \dfrac{\text{latura bazei} \cdot \text{apotema}}{2} = 2 \cdot 6 \cdot 5 = \boxed{60}\,\text{cm}^2$.
8. $V_{\text{cilindru}} = A_{\text{bazei}} \cdot h = 25\pi \cdot 7 = \boxed{175}\,\pi\,\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Primii termeni ai şirului numerelor naturale prime sunt

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\ldots,$$

deci al şaptelea termen este egal cu 17.
Comentariu: Un exerciţiu care era preferabil să fie evitat, dat fiind că unii îl vor număra greşit şi pe 1 ca număr prim. Reamintim că *un număr natural este prim dacă şi numai dacă are exact doi divizori*.
10. $\boxed{B}$: $3a + 2b - 3c = 3(a - c) + 2b = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) = 9 - 10 = \boxed{-1}$
11. $\boxed{D}$: Fie O centrul cercului. Unghiul $\widehat{AOB}$ este unghi la centru şi are măsura egală cu cea a arcului de cerc subîntins. Deci, $m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB}) = 60^\circ$. Cum triunghiul AOB este isoscel ($AO = OB$) şi are un unghi de 60° rezultă că este triunghi echilateral, deci $AO = OB = AB = 5\ cm$. Prin urmare, $L_{cerc} = 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi\ cm$.
12. $\boxed{A}$: Lăţimea dreptunghiului după care se desfăşoară cubul este egală cu latura cubului, adică $3\ cm$, iar lungimea dreptunghiului este egală cu de 4 ori

latura cubului, deci $4 \cdot 3 = 12\ cm$. Prin urmare, aria dreptunghiului după care se desfăşoară suprafaţa laterală a cubului este egală cu $3 \cdot 12 = 36\ cm^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a numărul exerciţiilor rezolvate de Ana, d numărul exerciţiilor rezolvate de Dan şi t numărul exercţiilor rezolvate de Tudor. Ştim că Ana a rezolvat cu 6 exerciţii mai mult decât Dan, adică $a = d + 6 \quad (1)$, şi cu 8 mai puţin decât Tudor, adică $a = t - 8 \quad (2)$. Scăzând din relaţia (2), relaţia (1) avem $0 = t - 8 - (d + 6)$ de unde $t - d = \boxed{14}$ exerciţii.

b. Cum Dan a rezolvat un număr de exerciţii egal cu $\frac{5}{8}$ din numărul exerciţiilor rezolvate de Ana, avem relaţia $d = \frac{5}{8}a$. Înlocuind în relaţia (1) de la punctul (a) obţinem $a = \frac{5}{8}a + 6$, de unde $a - \frac{5}{8}a = 6$, ceea ce este echivalent cu $\frac{3}{8}a = 6$, sau $a = \frac{6 \cdot 8}{3} = \boxed{16}$ exerciţii.

14. a. Folosind o formulă de calcul prescurtat, avem

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \sqrt{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{7}} = \sqrt{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} \\ &= \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = \boxed{3} \end{aligned}$$

b. Folosind o formulă de calcul prescurtat şi punctul precedent, avem

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= \left(\sqrt{4 - \sqrt{7}}\right)^2 - 2 \cdot 3 + \left(\sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2 \\ &= 4 - \sqrt{7} - 6 + 4 + \sqrt{7} = \boxed{2} \end{aligned}$$

c. Cum $x - y = \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}} < 0$, din rezultatul punctului (b) $(x - y)^2 = 2$, deducem $x - y = -\sqrt{2}$. Prin urmare, $\frac{x - y}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 < 0$ şi $\frac{x - y}{\sqrt{2}} = -1 \in \mathbb{Z}$.

15. a.

b. Triunghiul echilateral ABC are lungimea laturii de $10\ cm$, deci înălţimea triunghiului are lungimea egală cu $\frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$. Prin urmare, $A_t = 2A_{ABC} + 3A_{ABB'A'} = 2\frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} + 3AB \cdot BB' = 50\sqrt{3} + 3 \cdot 10 \cdot 5 = 50\sqrt{3} + 150 = \boxed{50(\sqrt{3} + 3)}\ cm^2$.

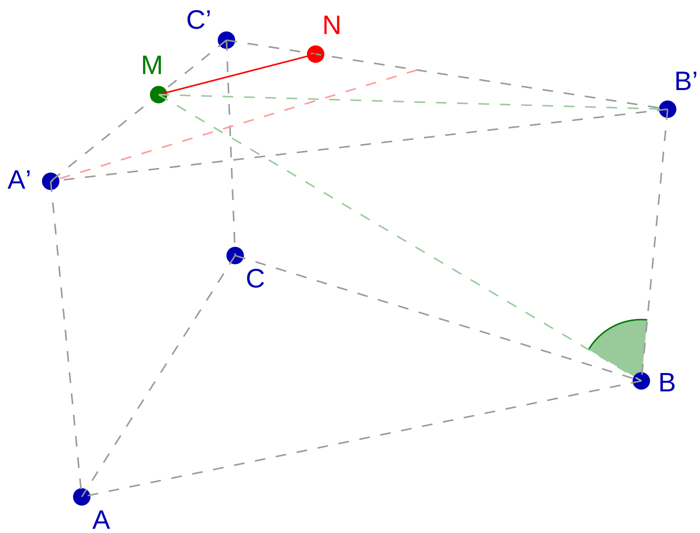

FIGURA . Exercițiul 15.

c. Din $AA' \| BB'$ rezultă că unghiul dintre AA' şi MB este unghiul dintre BB' şi MB adică unghiul $\widehat{MBB'}$. Cum M este mijlocul laturii $A'C'$ şi triunghiul $A'B'C'$ este echilateral, $B'M$ este şi înălţime în triunghiul $A'B'C'$ şi are lungimea egală cu $5\sqrt{3}\ cm$. În triunghiul dreptunghic $BB'M$ avem $\tan\widehat{MBB'} = \frac{B'M}{BB'} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$, de unde rezultă că $\widehat{MBB'} = \boxed{60^\circ}$.

d. Fie N piciorul perpendicularei din M pe $B'C'$. Cum $BB' \perp (A'B'C')$ şi $MN \subset (A'B'C')$ rezultă că $BB' \perp MN$. Din $MN \perp B'C'$ şi $MN \perp BB'$ avem că $MN \perp (BCC'B')$. Deci distanţa de la M la planul $(B'BC)$ este MN. În triunghiul dreptunghic $B'MN$, avem $m(\widehat{MB'N}) = 30^\circ$ deoarece $B'M$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A'B'C'}$. Atunci din $\sin\widehat{MB'N} = \frac{MN}{B'M}$, avem $MN = \sin\widehat{MB'N} \cdot B'M = \sin 30^\circ \cdot B'M = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\ cm$.

CAPITOLUL 4

Varianta 79

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3 \cdot 4 : 2 = 12 : 2 = \boxed{6}$
2. Numărul cu 25 mai mic decât 75 este numărul $75 - 25 = \boxed{50}$.
3. $\dfrac{30}{100} \cdot 30 = \boxed{9}$
4. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, deci numărul elementelor mulţimii A este $\boxed{5}$.
5. Perimetrul rombului de latura $12\ cm$ este egal cu $4 \cdot 12 = \boxed{48}\,\mathrm{cm}$.
6. Conform teoremei lui Pitagora lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic este egală cu $\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = \boxed{6\sqrt{2}}$ cm.
7. $V_{con} = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 25 \cdot 4\pi = \boxed{100}\,\pi\,\mathrm{cm}^3$.
8. $A_{\text{sferă}} = 4\pi r^2 == 4\pi \cdot 4^2 = 4 \cdot 16\pi = \boxed{64}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Media geometrică a numerelor $a = 28$ şi $b = 63$ este egală cu $\sqrt{ab} = \sqrt{28 \cdot 63} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9} = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$.
10. $\boxed{D}$: $E(2) = (2-1)^{10} + (1-2)^{10} = 1^{10} + (-1)^{10} = 1 + 1 = 2$
11. $\boxed{D}$: În triunghiul dreptunghic ABC avem $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$, de unde $AC = BC \sin\widehat{ABC} = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ cm$.
12. $\boxed{C}$: $\mathrm{ctg}\hat{B} + \mathrm{ctg}\hat{C} = \dfrac{BP}{AP} + \dfrac{PC}{AP} = \dfrac{BP + PC}{AP} = \dfrac{BC}{AP} = \dfrac{BC}{2BC} = \dfrac{1}{2}$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie g numărul geologilor şi b numărul biologilor care participă la început la expediţie. Din faptul că numărul geologilor este de două ori mai mare decât numărul biologilor, avem relaţia $g = 2b \quad (1)$. După o săptămână

pleacă 20 de geologi, ceea ce înseamnă că rămân $g-20$ geolegi. Cum sosesc 18 biologi, numărul biologilor participanţi devine $b+18$. Prin plecarea a 20 de geologi şi sosirea a 18 biologi, avem numărul geologilor egal cu cel al biologilor, adică $g-20=b+18 \quad (2)$. Înlocuind g din relaţia (1) în relaţia (2) obţinem $2b-20=b+18$, de unde $b=\boxed{38}$.

b. De la punctul (a) ştim că la începutul expediţiei au fost 38 de biologi. În a doua săptămâna sosesc 18 biologi, adică numărul biologilor devine $38+18=56$. Cum în a două săptămână numărul geologilor este egal cu cel al biologilor, deducem că avem 56 de geologi. Prin urmare, în a două săptămână avem $2\cdot 56=\boxed{112}$ specialişti participanţi la expediţie.

14. a. Punctul $A(a,0)$ se află pe reperezentarea grafică funcţiei f dacă şi numai dacă $f(a)=0$. Aceasta revine la $(2a+3)a+1=0$ sau la $2a^2+3a+1=0$. Discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi este $\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot 1=1$, de unde $a_1=\frac{-3+1}{4}=\frac{-2}{4}=\boxed{\frac{-1}{2}}$ şi $a_2=\frac{-3-1}{4}=\frac{-4}{4}=\boxed{-1}$.

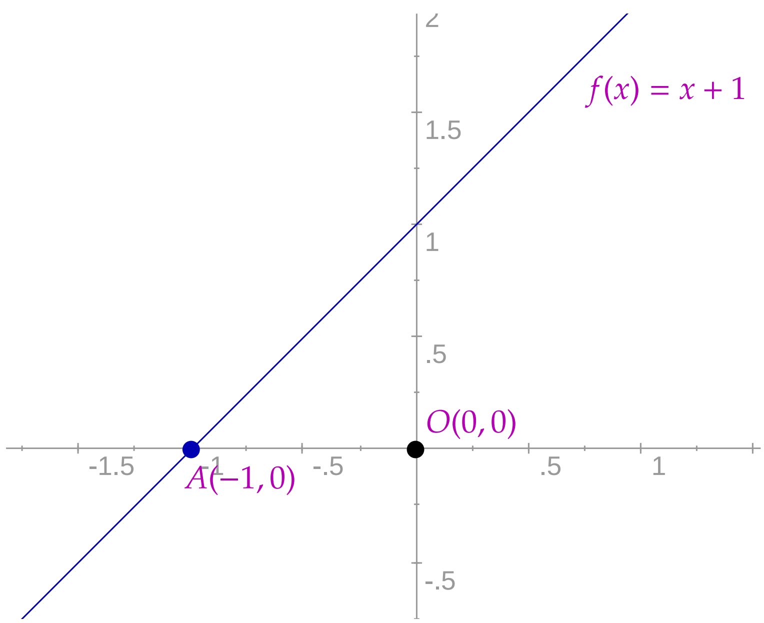

FIGURA . Exerciţiul 14.

b.

c. Pentru $a=-1$, avem $f(x)=x+1$, prin urmare $N=f(n)f(n+2)+1=(n+1)(n+3)+1=n^2+n+3n+3+1=n^2+4n+4=(n+2)^2$ care este pătrat perfect pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

15. a.

b. AC, AD' şi CD' sunt congruente şi au fiecare lungimea $6\sqrt{2}$, deoarece sunt diagonale ale feţelor cubului. Deci triunghiul $AD'C$ este echilateral şi $P_{AD'C}=3AC=3\cdot 6\sqrt{2}=\boxed{18\sqrt{2}}\ cm$.

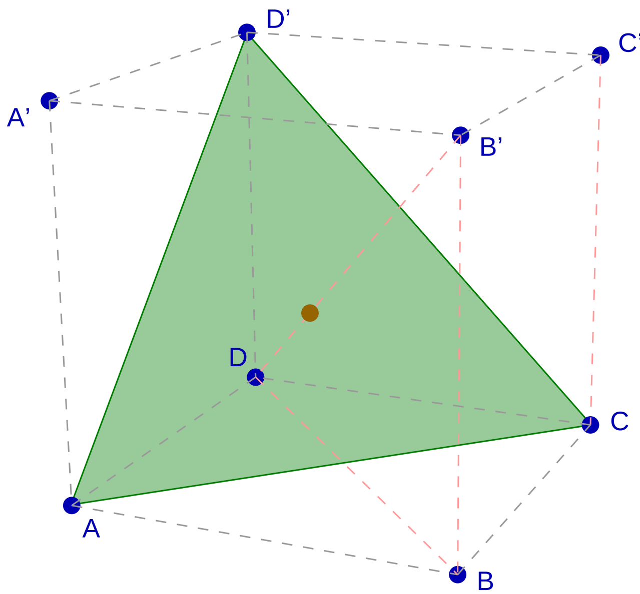

FIGURA . Exerciţiul 15.

c. Cum toate muchiile piramidei $ACB'D'$ sunt diagonale ale feţelor cubului, ele sunt congruente. Din faptul că feţele piramidei $ACB'D'$ sunt triunghiuri echilaterale cu latura de lungime $6\sqrt{2}\ cm$, rezultă că aria totală a piramidei $ACB'D'$ este egală cu $4A_{ACD'} = 4\dfrac{AD' \cdot CD' \cdot \sin 60^\circ}{2} = 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{72\sqrt{3}}\ cm^2$.

d. Cum diagonalele pătratului sunt perpendiculare, avem $AC \perp BD$. Din faptul că $BB' \perp (ABCD)$ rezultă că BB' este perpendiculară pe orice dreaptă din planul $(ABCD)$, deci şi pe AC. Din $AC \perp BB'$ şi $AC \perp BD$, avem $AC \perp (BDB')$ şi cum $B'D \subset (BDB')$, rezultă că $AC \perp DB'$.
Din $DC \perp (BCC'B')$ şi $BC' \subset (BCC'B')$, avem $DC \perp BC'$. Cum $DC \perp BC'$ şi $BC' \perp B'C$ (diagonalele pătratului sunt perpendiculare), rezultă că $BC' \perp (DCB')$. Dar $AD' \| BC'$, deci $AD' \perp (DCB')$. Cum $DB' \subset (DCB')$ rezultă că $AD' \perp DB'$.
Am demonstrat prin urmare că $AD' \perp DB'$ şi că $AC \perp DB'$, de unde avem că $DB' \perp (AD'C)$.

CAPITOLUL 5

Varianta 80

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2^3 + 3 = 8 + 3 = \boxed{11}$
2. Cel mai mic număr care aparţine mulţimii $\{12, 5; -3; 1; -12; 30\}$ este egal cu $\boxed{-12}$.
3. Opusul numărului $\frac{5}{3}$ este egal cu $\boxed{-\frac{5}{3}}$.
4. În urnă sunt în total 5 bile dintre care 2 bile sunt galbene. Probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă aceasta să fie galbenă este egală cu $\boxed{\frac{2}{5}}$.
5. Perimetrul dreptunghiului cu laturile de lungimi 5 cm şi 8 cm este egal cu $2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 10 + 16 = \boxed{26}$ cm.
6. Aria discului este egală cu $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = \boxed{16}\,\pi$ cm^2.
7. Diagonala paralelipipedului are lungimea
$$\sqrt{1^2 + 3^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{1 + 9 + 6} = \sqrt{16} = \boxed{4}\text{ cm.}$$
8. $A_{\text{sferă}} = 4\pi \cdot r^2$, de unde $r = \sqrt{\frac{A_{\text{sferă}}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{36\pi}{4\pi}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$ cm.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: $1-2+3-4+..+90-100 = (1-2)+(3-4)+...+(90-100) = \underbrace{-1-1-\ldots-1}_{50-ori} = -50$
10. $\boxed{C}$: O soluţie a ecuaţiei $x+3y = 6$ este $(3, 1)$ deoarece verifică ecuaţia, adică $3 + 3 \cdot 1 = 6$ sau $3 + 3 = 6$. Ca metodă, la o asemenea problemă trebuie să verificaţi toate valorile până daţi de cea "bună".
11. $\boxed{B}$: Fie M mijlocul lui BC. Din $BM = MC$, $DM = DM$ şi $m(\widehat{BMD}) = m(\widehat{CMD}) = 90°$, conform cazului de congruenţa "latură-unghi-latură" (sau "catetă-catetă") rezultă că triunghiurile BMD şi CMD sunt congruente. De aici $BD = CD$ şi atunci $P_{ABD} = AB + BD + DA = AB + CD + DA = AB + AC = 8 + 12 = 20$ cm.

12. $\boxed{D}$: $DB = DC + CB = \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{AB}{4} + \frac{AB}{2} = \frac{32}{4} + \frac{32}{2} = 8 + 16 = 24$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Deoarece $\frac{1}{4} = 0,25$ reprezintă 25%, iar $25 < 30 < 40$, rezultă că persoana respectivă a cheltuit cel mai mult în $\boxed{\text{a doua}}$ zi.

b. Persoana respectivă a cheltuit $30 + 40 + 25\% = 95\%$ din S, deci i-au rămas $100\% - 95\% = 5\%$ din S. Avem astfel $\frac{5}{100}S = 600$, de unde $S = \frac{600 \cdot 100}{5} = 12000$ lei.

Prin urmare, în prima zi persoana a cheltuit $\frac{3}{10} \cdot 12000 = \boxed{3600}$ lei.

14. a. Un punct de coordonate (a, b) aparţine reprezentării grafice a funcţiei f dacă şi numai dacă $f(a) = b$ şi $a \in [-2, 3]$, iar $b \in \mathbb{R}$.

Avem $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} = 0 \neq 1$, deci punctul $D(1, 1)$ nu aparţine reprezentării grafice a funcţiei f.

Pe de altă parte $f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{2} = -1$, deci $P(-1, -1)$ aparţine reprezentării grafice a funcţiei f.

Cum $-3 \notin [-2, 3]$ rezultă că punctul $Q(-3, -2)$ nu aparţine reprezentării grafice a funcţiei f.

b.

c. Inecuaţia $4f(x) - x\sqrt{2} < 4$ este echivalentă cu $4\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) - x\sqrt{2} < 4$. După simplificare avem $2x - 2 - x\sqrt{2} < 4$, sau $x(2 - \sqrt{2}) < 4 + 2$, de unde $x < \frac{6}{2 - \sqrt{2}} = \frac{6(2 + \sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = 3(2 + \sqrt{2})$. Cum $\sqrt{2} < 1,5$ rezultă $x < 3(2 + \sqrt{2}) < 3 \cdot 3,5 = 10,5$ şi cum $x \in \mathbb{N}$ şi $x \in [-2, 3]$, soluţia inecuaţiei date este $x \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9, 10\} \cap \mathbb{N} \cap [-2, 3] = \boxed{\{0, 1, 2, 3\}}$.

15. a.

b. Din BI bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ rezultă că $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$. Cum $MI \| BC$ rezultă că $\widehat{MIB} = \widehat{IBC}$ ca unghiuri alterne interne. Din $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ şi $\widehat{MIB} = \widehat{IBC}$ rezultă că $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$. Deci triunghiul MBI este isocel şi $MB = MI$. Printr-un raţionament analog arătăm că triunghiul NCI este isocel şi $NC = NI$. Prin urmare, $MN = MI + IN = MB + NC$.

c. Triunghiul ABC este echilateral cu latura de lungime 18 cm, deci $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{18 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 81\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

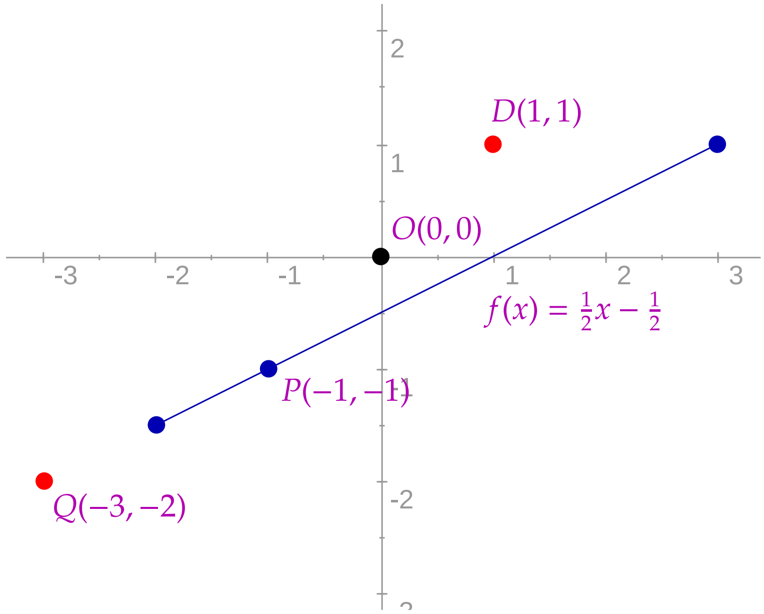

FIGURA . Exercițiul 14.

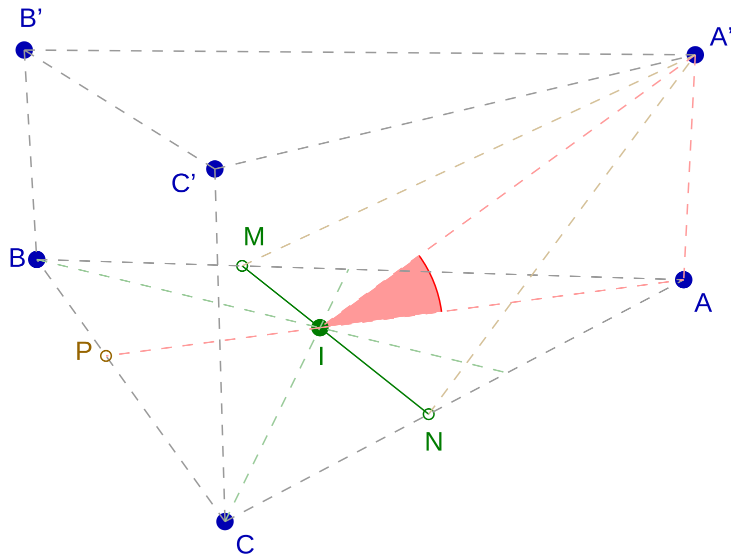

FIGURA . Exercițiul 15.

Cum $ABB'A'$ este un dreptunghi cu laturile de lungimi 18 cm şi 6 cm, avem $A_{ABB'A'} = 18 \cdot 6 = 108\,\text{cm}^2$.

Prin urmare, $A_t = 2A_{ABC} + 3A_{ABB'A'} = 2 \cdot 81\sqrt{3} + 3 \cdot 108 = \boxed{162\sqrt{3} + 324}\,\text{cm}^2$.

d. Din $MN \| BC$ avem $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ şi $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (unghiuri corespondente). Cum $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ rezultă că $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ şi deci $AM = AN$.

Din $AN = AM$, $AA' = AA'$ şi $\widehat{A'AM} = \widehat{A'AN} = 90^\circ$, rezultă că triunghiurile $A'AM$ şi $A'AN$ sunt congruente şi deci $A'M = A'N$.
Să observăm că punctul I este mijlocul lui MN. Într-adevăr $MI = IN$ deoarece $MI = BM$, $IN = NC$ şi $MB = NC$. Cum triunghiul $A'MN$ este isocel şi I este mijlocul lui MN, mediana $A'I$ este şi înălţime, deci $A'I \perp MN$. Triunghiul AMN fiind isocel, mediana AI este şi înălţime, adică $AI \perp MN$. Din $AI \perp MN$ şi $A'I \perp MN$ rezultă că unghiul dintre planele (ABC) şi $(A'MN)$ este $\widehat{A'IA}$.
Fie P intersecţia lui AI cu BC, deci AP este înălţime în triunghiul echilateral ABC. Punctul I este intersecţia bisectoarelor triunghiului echilateral ABC, deci I este şi centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci $AI = \dfrac{2}{3}AP = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{18\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

În triunghiul dreptunghic $A'AI$ avem $\tan\widehat{A'IA} = \dfrac{A'A}{AI} = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, de unde $m(\widehat{A'IA}) = \boxed{30^\circ}$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA EXAMEN.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE LICEU.