BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 71–75

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

Capitolul 1. Varianta 71 3
1. Subiectul I. 3
2. Subiectul II. 3
3. Subiectul III. 4

Capitolul 2. Varianta 72 7
1. Subiectul I. 7
2. Subiectul II. 7
3. Subiectul III. 8

Capitolul 3. Varianta 73 13
1. Subiectul I. 13
2. Subiectul II. 13
3. Subiectul III. 14

Capitolul 4. Varianta 74 17
1. Subiectul I. 17
2. Subiectul II. 17
3. Subiectul III. 18

Capitolul 5. Varianta 75 21
1. Subiectul I. 21
2. Subiectul II. 21
3. Subiectul III. 22

CAPITOLUL 1

Varianta 71

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3 \cdot 8 = \boxed{24}$
2. Numărul 10 descompus în factori primi este egal cu $\boxed{2 \cdot 5}$.
3. Partea întreagă a numărului $a = 3,25$ este egală cu $\boxed{3}$.
4. Inversul numărului $\frac{3}{4}$ este egal cu $\boxed{\frac{4}{3}}$.
5. Trapezul fiind isocel are două unghiuri cu măsura de 100° şi unghiurile ascuţite congruente. Cum suma măsurilor unghiurilor într-un trapez este egală cu 360° avem măsura unui unghi ascuţit egală cu $\frac{360^\circ - (100^\circ + 100^\circ)}{2} = \frac{160^\circ}{2} = \boxed{80^\circ}$.
6. Lungimea laturii este egală cu $\frac{\text{perimetru}}{6} = \frac{72}{6} = \boxed{12}\ cm$.
7. $A_l = 3 \cdot A_{\text{feţe}} = 3 \cdot 10 \cdot 4 = \boxed{120}\ dm^2$.
8. $V_{paralelipiped} = A_{bazei} \cdot h$, unde h este înălţimea paralelipipedului. Avem deci $h = \frac{V_{paralelipiped}}{A_{bazei}} = \frac{100}{4} = \boxed{25}$ cm.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: $x = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$, $y = 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ şi $z = 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$. Avem $\sqrt{20} < \sqrt{27} < \sqrt{32}$, deci $x < y < z$.
10. $\boxed{C}$: Fie a şi b cele două numere întregi. Avem $a+b = 8$ şi $a-b = -8$. Adunând cele două relaţii obţinem $a + b + a - b = 8 - 8$ sau $2a = 0$, de unde $a = 0$. Deci produsul ab este egal cu zero.
11. $\boxed{A}$: Un pătrat are 4 axe de simetrie: diagonalele şi liniile mijlocii (privit ca trapez în două moduri) .
12. $\boxed{D}$: $\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$ şi cum din ipoteză $\tan \hat{C} = 2$, avem relaţia $\frac{AB}{AC} = 2$. Vrem să calculăm $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC avem $AC^2 + AB^2 = BC^2 \quad (1)$. Împărţind relaţia (1) cu AC^2 obţinem

$1+\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$ ceea ce este echivalent cu $1+(\tan\hat{C})^2 = \frac{1}{(\sin\hat{B})^2}$ sau $1+2^2 = \frac{1}{(\sin\hat{B})^2}$, de unde $(\sin\hat{B})^2 = \frac{1}{5}$ sau $\sin\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Conform teoremei împărţirii cu rest avem

$$\begin{aligned} 123 &= x\cdot q_1+3, \text{ unde } q_1\in\mathbb{Z},\ x>3 \\ 87 &= x\cdot q_2+7, \text{ unde } q_2\in\mathbb{Z},\ x>7 \\ 62 &= x\cdot q_3+2, \text{ unde } q_3\in\mathbb{Z},\ x>2 \end{aligned}$$

Relaţiile precedente sunt echivalente cu

$$\begin{aligned} 120 &= 123-3 = x\cdot q_1 \\ 80 &= 87-7 = x\cdot q_2 \\ 60 &= 62-2 = x\cdot q_3 \end{aligned}$$

unde $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$ şi $x>7$. Rezultă că x divide 120, 80 şi 60. Cel mai mare număr natural $x>7$ care divide 120, 80 şi 60 este cel mai mare divizor comun al numerelor 120, 80 şi 60, adică $\boxed{20}$.

b. Cel mai mic număr natural $x>7$ care divide 120, 80 şi 60 este $\boxed{10}$.

14. a. $E(\sqrt{2}-3) = (\sqrt{2}-3)^2+(\sqrt{2}-3)+5\sqrt{2} = 2-6\sqrt{2}+9+\sqrt{2}-3+5\sqrt{2} = \boxed{8}$.

b. Perechea $(1,1)$ este soluţie a ecuaţiei $4x-y-3=0$ căci $4\cdot 1-1-4=0$.

c. Ecuaţia $4x-y-3=0$ se poate scrie $4x=y+3$, sau $x=\frac{y+3}{4}$. Din $x\in[0,1]$, ceea ce este echivalent cu $0\le x\le 1$, rezultă $0\le\frac{y+3}{4}\le 1$. Aducând la acelaşi numitor avem $0\le y+3\le 4$, sau $0-3\le y\le 4-3$. Deci $y\in[-3,1]$.

15. a.

b. Notăm cu $MNPQ$ secţiunea axială a trunchiului de con. În trapezul $MNPQ$, MN este baza mică, PQ baza mare şi T intersecţia diagonalelor trapezului. Din ipoteză $MP\perp NQ$, de unde rezultă că triunghiurile isocele MTN şi PTQ sunt dreptunghice isocele, deci $\widehat{PQT} = \widehat{QPT} = \widehat{NMT} = \widehat{MNT} = 45°$. În triunghiul dreptunghic PTQ avem $\sin\widehat{PQT} = \frac{PT}{PQ}$, de unde $PT = PQ\cdot\sin\widehat{PQT} = 12\sin 45° = 12\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\,cm$. În triunghiul dreptunghic MTN avem $\sin\widehat{MNT} = \frac{MT}{MN}$, de unde

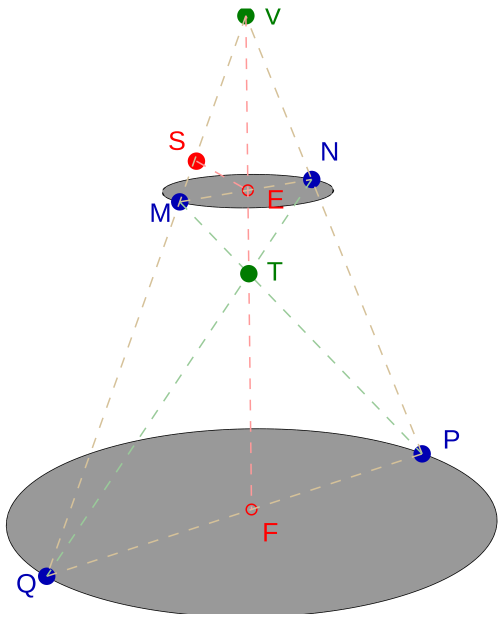

FIGURA . Exercițiul 15.

$MT = MN \cdot \sin\widehat{MNT} = 4\sin 45^\circ = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ cm$. Conform teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic MTQ avem $MQ = \sqrt{MT^2 + TQ^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{72+8} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ cm$.

c. Fie E centrul bazei mici, F centrul bazei mari a trunchiului de con și $MQ \cap PN = \{V\}$. TF este mediană în triunghiul dreptunghic PTQ și este jumătate din ipotenuză, adică $TF = \frac{PQ}{2} = \frac{12}{2} = 6$. Similar, TE este mediană în triunghiul dreptunghic MTN și este jumătate din ipotenuză, adică $TE = \frac{MN}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Prin urmare, $EF = ET + TF = 2 + 6 = 8\ cm$. Din $ME || QF$ rezultă că triunghiurile VEM și VQF sunt asemenea, de unde avem $\frac{VE}{VF} = \frac{ME}{QF}$. Facând proporții derivate avem $\frac{VE}{VF - VE} = \frac{ME}{QF - ME}$ ceea ce este echivalent cu $\frac{VE}{EF} = \frac{ME}{FQ - ME}$ sau cu $\frac{VE}{8} = \frac{2}{6-2}$, de unde $VE = \frac{8 \cdot 2}{4} = 4\ cm$. Prin urmare, înălțimea conului din care provine trunchiul de con este $VF = VE + EF = 4 + 8 = 12$, iar $V_{con} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 12}{3} = \boxed{144\pi}\ cm^3$.

d. Fie S proiecția lui E pe generatoarea VQ. Distanța cerută este ES. În triunghiul dreptunghic VEM avem $A_{VEM} = \frac{VE \cdot ME}{2} = \frac{ES \cdot VM}{2}$, de unde

$ES = \dfrac{VE \cdot ME}{VM}$ (1). Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VEM avem $VM = \sqrt{ME^2 + VE^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Înlocuind în relaţia (1) avem $ES = \dfrac{4 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 72

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $543 - 345 = \boxed{198}$
2. Cel mai mare divizor comun al numerelor $12 = 2^2 \cdot 3$ şi $28 = 2^2 \cdot 7$ este egal cu $2^2 = \boxed{4}$.
3. Ecuaţia $2x + 1 = 7$ este echivalentă cu $2x = 6$, de unde $x = \frac{6}{2} = \boxed{3}$.
4. $\frac{40}{100} \cdot 120 = \boxed{48}$
5. Cum $1000\ g = 1\ kg$, avem $40000\ g = \frac{40000}{1000} kg = \boxed{40}\, kg$.
6. Dacă linia mijlocie este de $5\ cm$, atunci latura triunghiului echilateral care este dublul liniei mijlocii, are lungimea egală cu $2 \cdot 5 = 10\, cm$. Prin urmare, aria triunghiului echilateral este egală cu $\frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{25\sqrt{3}}\ cm^2$.
7. Fie $VABCD$ piramida patrulateră regulată, O proiecţia lui V pe planul $(ABCD)$ şi M proiecţia lui V pe AB. Folosind faptul că $MO = \frac{BC}{2}$ şi aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM avem $VO = \sqrt{VM^2 - MO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = \boxed{12}\ cm$.
8. $V_{cilindru} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 36 \cdot 8\pi = \boxed{288}\, \pi\ cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Din $\frac{x}{4} = \frac{3}{y}$, avem $xy = 12$. Deci, $x^2y^2 - 44 = (xy)^2 - 44 = 12^2 - 44 = 144 - 44 = 100$.
10. $\boxed{C}$: Media geometrică a numerelor 4 şi 6 este egală cu $\sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$.
11. $\boxed{A}$: Aplicând teorema lui Pitagora găsim că lungimea ipotenuzei este egală cu $\sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50\, cm$. Aria triunghiului dreptunghic este egală cu $\frac{\text{produsul catetelor}}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600\ cm^2$, iar pe de altă parte

egală cu $\frac{\text{ipotenuza} \cdot \text{înălţimea}}{2}$. Notând cu h lungimea înălţimii şi egalând cele două arii avem $600 = \frac{50 \cdot h}{2}$, de unde $h = \frac{600 \cdot 2}{50} = 24\ cm$.

12. $\boxed{A}$: Cum $AB \| CD$, triunghiul MAB este asemenea cu triunghiul MDC, de unde $\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC}$. Făcând proporţii derivate obţinem $\frac{MA}{MD - MA} = \frac{AB}{DC - AB}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{MA}{AD} = \frac{10}{15 - 10}$, sau cu $\frac{MA}{6} = 2$, de unde $MA = 12\ cm$. Prin urmare, perimetrul triunghiului MDC este egal cu $MA + AD + DC + BC + MB = 2MA + 2AD + DC = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 15 = 24 + 12 + 15 = 51\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum cel mai mare divizor comun al celor două numere naturale este 13, numerele sunt de forma $13p$ şi $13q$, cu $p, q \in \mathbb{N}$ prime între ele. Ştiind că diferenţa pătratelor lor este egală cu 1183, avem $(13p)^2 - (13q)^2 = 1183$, ceea ce este echivalent cu $169(p^2 - q^2) = 1183$ sau $p^2 - q^2 = \frac{1183}{169} = 7$. Rescriem acesta relaţie sub forma $(p - q)(p + q) = 7$. Cum $p, q \in \mathbb{N}$ şi $p - q \leq p + q$, deducem unde $p - q = 1$ şi $p + q = 7$. Prin adunarea celor două relaţii obţinem $2p = 8$, de unde $p = 4 \in \mathbb{N}$. Substituind înapoi în oricare din relaţii deducem şi $q = 3 \in \mathbb{N}$. Prin urmare, numerele naturale cerute sunt $13p = 13 \cdot 4 = \boxed{52}$ şi $13q = 13 \cdot 3 = \boxed{39}$.

b. Avem $\frac{39}{52} = 0,75$, deci numărul mic reprezintă $\boxed{75\%}$ din numărul mare.

14. a. Cum graficul funcţiei f trece prin punctul $M(1, 0)$, avem $(a - 1) \cdot 1 + b = 0$, ceea ce este echivalent cu $a + b = 1$. Similar, cum graficul trece prin punctul $N(0, 3)$ avem $(a - 1) \cdot 0 + b = 3$ ceea ce este echivalent cu $b = \boxed{3}$. Înlocuind $b = 3$ în $a + b = 1$ obţinem $a = 1 - 3 = \boxed{-2}$.

b.

c. Fie R proiecţia lui P pe MN. Ştim $PM = 5\ cm$, iar aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PON obţinem $PN = \sqrt{PO^2 + ON^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\ cm$. Din $PM = PN$ rezultă că triunghiul PNQ este isocel. Cum PR este înălţime în triunghiul isocel PNQ rezultă că PR este şi mediană, deci R este mijlocul lui NM. Prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic NOM avem $NM = \sqrt{NO^2 + MO^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Deci $NR = RM = \frac{\sqrt{10}}{2}$. În final, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic PRM avem $PR = \sqrt{PM^2 - RM^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{100 - 10}{4}} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{2}}$

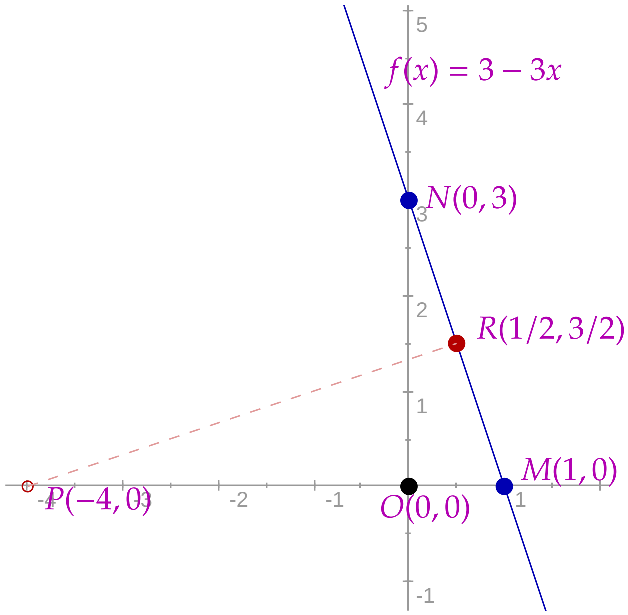

FIGURA . Exerciţiul 14.

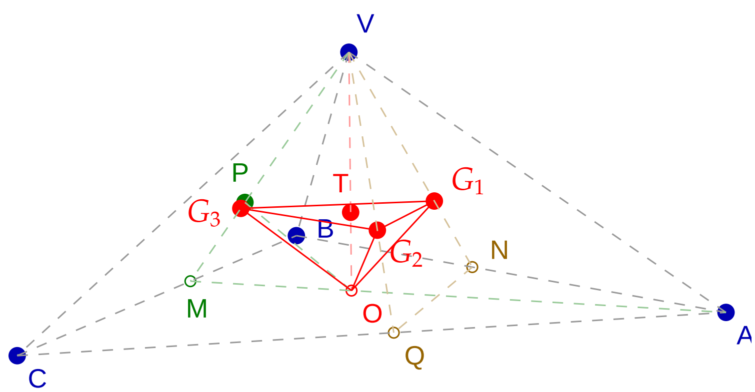

FIGURA . Exerciţiul 15. Atenţie! Punctele G_3 şi P nu coincid, ele sunt doar foarte apropiate.

15. a.
    b. Fie M mijlocul lui BC şi P proiecţia lui O pe VM. Triunghiul VBC fiind isocel ($VC = VB$), mediana VM este şi înălţime, deci $VM \perp BC$. Din $OP \perp VM$, $PM \perp BC$, $OM \perp BC$ şi $BC \subset (VBC)$ conform reciprocei doi a teoremei celor trei perpendiculare avem că $OP \perp (VBC)$.

Prima variantă: Conform ipotezei $OP = 7,2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5}$. Cum triunghiul VOM este dreptunghic $A_{VOM} = \frac{VO \cdot OM}{2} = \frac{OP \cdot VM}{2}$, de unde $VO \cdot OM = OP \cdot VM \quad (1)$. Cum O este centrul de greutate al triunghiului ABC, $OM = \frac{1}{3} \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM avem $VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{12^2 + \left(\frac{AB\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{144 + \frac{AB^2}{12}}$. Înlocuind în relaţia (1) obţinem $12 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{6} = \frac{36}{5} \cdot \sqrt{144 + \frac{AB^2}{12}}$, ceea ce este echivalent cu $AB\sqrt{3} = \frac{18}{5} \cdot \sqrt{144 + \frac{AB^2}{12}}$. Ridicând la pătrat avem: $3AB^2 = (144 + \frac{AB^2}{12}) \cdot \frac{324}{25}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{75AB^2}{324} = 144 + \frac{AB^2}{12}$, sau $\frac{75AB^2}{324} - \frac{AB^2}{12} = 144$. Aducând la acelaşi numitor obţinem $\frac{AB^2(75-27)}{324} = 144$, de unde $AB^2 = \frac{324 \cdot 144}{48} = 324 \cdot 3$. Astfel $AB = \sqrt{324 \cdot 3} = \boxed{18\sqrt{3}}$.

A doua variantă: In triunghiul dreptunghic VOP, folosind teorema lui Pitagora, $VP = \sqrt{VO^2 - OP^2} = \sqrt{12^2 - 7,2^2} = \sqrt{92,16} = 9,6$.
Folosind teorema înălţimii în triunghiul dreptunghic VOM, avem $OP^2 = VP \cdot PM$. De aici $PM = \frac{OP^2}{VP} = \frac{7,2^2}{9,6} = 5,4$.
Conform teoremei lui Pitagora aplicată triunghiului dreptunghic MOP, avem $OM = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{7,2^2 + 5,4^2} = \sqrt{51,84 + 29,16} = \sqrt{81} = 9$.
Cum O este centrul de greutate al triunghiului ABC, $OM = \frac{1}{3} \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$. De aici, $AB = \frac{6 \cdot OM}{\sqrt{3}} = \frac{54}{\sqrt{3}} = \boxed{18\sqrt{3}}$.

c. $A_l = 3A_{VBC}$. De la punctul precedent (a doua variantă) avem $VM = VP + PM = 9,6 + 5,4 = 15$. Prin urmare $A_{VBC} = \frac{VM \cdot BC}{2} = \frac{15 \cdot 18\sqrt{3}}{2} = 135\sqrt{3}\ cm^2$.Prin urmare, $A_l = 3 \cdot 135\sqrt{3} = \boxed{405\sqrt{3}}\ cm^2$.

d. Fie N mijlocul lui AB şi Q mijlocul lui AC. Se ştie că $G_1 \in VQ$, $G_2 \in VM$ şi $G_3 \in VN$. Cum G_1 este centrul de greutate al triunghiului VAC, $VG_1 = \frac{2}{3}VQ$. Similar, avem $VG_2 = \frac{2}{3}VM$ şi $VG_3 = \frac{2}{3}VN$. Din $\widehat{G_1VG_2} = \widehat{QVN}$, $VG_1 = \frac{2}{3}VQ$ şi $VG_3 = \frac{2}{3}VN$ rezultă că triunghiurile VG_1G_3 şi VQN sunt asemenea. Din asemănarea triunghiurilor rezultă că $G_1G_3 = \frac{2}{3}QN$. Cum

QN este linie mijlocie în triunghiul ABC, avem $QN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$, de unde $G_1G_3 = \dfrac{2}{3} \cdot 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Similar se arată că $G_1G_2 = 6\sqrt{3}$ şi $G_2G_3 = 6\sqrt{3}$, deci triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral de latură $6\sqrt{3}$. Atunci $A_{\Delta G_1G_2G_3} = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{2} = 54 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}\ cm^2$. Fie T intersecţia lui VO cu planul $(G_1G_2G_3)$. Din asemănarea triunghiurilor ΔVTG_2 şi ΔVOM rezultă că $VT = \dfrac{2}{3}VO = \dfrac{2}{3} \cdot 12 = 8\ cm$. In plus $VT \perp (G_1G_2G_3)$. Prin urmare, $V_{VG_1G_2G_3} = \dfrac{1}{3}A_{\Delta G_1G_2G_3} \cdot VT = \dfrac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = \boxed{72\sqrt{3}}\ cm^3$.

CAPITOLUL 3

Varianta 73

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $215 : 5 = \boxed{43}$
2. Pentru ca un număr să fie divizibil cu 3 trebuie ca suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 3. Suma cifrelor numărului $\overline{12x5}$ este egală cu $1+2+x+5 = 8+x$. Cea mai valoare a lui x pentru care $8+x$ este divizibil cu 3 este 7. Deci, cel mai mare număr de forma $\overline{12x5}$, scris în baza 10, divizibil cu 3 este $\boxed{\overline{1275}}$.
3. Mulţimea $A - B$ conţine elementele care sunt în A şi nu sunt în B. Deci, $A - B = \boxed{\{0\}}$.
4. Din $\dfrac{x}{25} = \dfrac{8}{5}$, rezultă $x = \dfrac{25 \cdot 8}{5} = \boxed{40}$.
5. Cum triunghiul este dreptunghic isocel, catetele sunt congruente. Dacă a este lungimea catetei, atunci aria triunghiului este egală cu $\dfrac{a^2}{2}$. Avem relaţia: $\dfrac{a^2}{2} = 18$, de unde $a^2 = 36$ şi $a = \boxed{6}\ cm$.
6. Toate cele patru laturi ale rombului au lungimea de $8\,cm$, deci perimetrul este egal cu $4 \cdot 8 = \boxed{32}\ cm$.
7. Dacă diametrul sferei este egal cu $6\,cm$, atunci raza sferei este egală cu $3\,cm$, iar volumul este $V_{\text{sferă}} = \dfrac{4\pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 4\pi \cdot 9 = \boxed{36}\pi\ cm^3$.
8. Cum toate muchiile au lungimea 6 şi prisma este dreaptă rezultă că feţele laterale ale prismei sunt pătrate şi au fiecare aria egală cu $6 \cdot 6 = 36\ cm^2$. Deci, $A_l = 3 \cdot A_{\text{feţe}} = 3 \cdot 36 = \boxed{108}\,cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: Distingem două cazuri. Dacă $x \geq 3$, ecuaţia devine $x - 3 = 8$, de unde $x = 11 \geq 3$. Dacă $x < 3$, ecuaţia devine $-x+3 = 8$, de unde $x = -8+3 = -5 < 3$. Deci soluţiile ecuaţiei date sunt $\{-5, 11\}$.
10. $\boxed{C}$: Căutăm un punct de coordonate (a, a) care aparţine graficului funţiei f, adică $f(a) = a$. Aceasta revine la $2-a = a$, de unde $a = 1$. Deci punctul căutat este $P(1, 1)$.

11. $\boxed{D}$: Aplicând teorema catetei în triunghiul dreptunghic ABC, avem $AB^2 = BD \cdot BC$ sau $15^2 = 9 \cdot BC$, de unde $BC = \frac{225}{9} = 25\ cm$. Avem deci $DC = BC - BD = 25 - 9 = 16\ cm$ şi aplicând iar teorema catetei în triunghiul dreptunghic ABC, avem $AC = \sqrt{DC \cdot BC} = \sqrt{16 \cdot 25} = 4 \cdot 5 = 20\ cm$.

12. $\boxed{C}$: Fie E proiecţia lui D pe AB. În triunghiul dreptunghic AED avem $\sin 60^\circ = \frac{DE}{AD}$, de unde $DE = AD \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Deoarece $a = 3^2 \cdot 31$ şi $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$, cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b este $3 \cdot 31 = \boxed{93}$.

b. Fie a, b, cu $a > b$ cele două numere naturale care au suma 77, adică $a + b = 77 \quad (1)$. Cum a împărţit la b dă câtul 4 şi restul 2, din teorema împărţirii cu rest avem $a = 4b+2$. Înlocuind în ecuaţia (1), avem $4b+7+b = 77$, echivalent cu $5b = 70$, de unde $b = \frac{70}{5} = \boxed{15}$. Substituind în relaţia (1), avem $a = 77 - 15 = \boxed{62}$.

14. a. Folosind formula de calcul prescurtat

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\,,$$

avem $N = (\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 1 = 2 + 3 + 1 = \boxed{6}$.

b. Ecuaţia $(3x-1)(x+3) = (1-3x)(x+2)$ este echivalentă cu $(3x-1)(x+3) - (1-3x)(x+2) = 0$, sau $(3x-1)(x+3) + (3x-1)(x+2) = 0$, Dând factor comun $3x-1$, obţinem $(3x-1)(x+3+x+2) = 0$, echivalent cu $(3x-1)(2x+5) = 0$, de unde $3x-1 = 0$ sau $2x+5 = 0$. Din $3x-1 = 0$, avem $x_1 = \boxed{\frac{1}{3}}$, iar din $2x+5 = 0$, avem $x_2 = \boxed{\frac{-5}{2}}$.

c. Inecuaţia $2(x+1) < \sqrt{5}(x+1)$ este echivalentă cu $2(x+1) - \sqrt{5}(x+1) < 0$ sau cu $(x+1)(2-\sqrt{5}) < 0$. Cum $\sqrt{5} > 2$ avem $2 - \sqrt{5} < 0$ de unde rezultă că inecuaţia $(x+1)(2-\sqrt{5}) < 0$ este echivalentă $x + 1 > 0$, de unde $\boxed{x \in (-1, \infty)}$.

15. a.

b. Fie O centrul bazei mari a trunchiului de con. In triunghiul dreptunghic ACB, CO este mediana relativă la ipotenuză, deci $CO = AO = OB = 4\ cm$. Din $AO = OC$ rezultă că triunghiul AOC este isocel, deci $\widehat{CAO} = \widehat{ACO}$, iar din $AD = DC$ rezultă că ADC este triunghi isoscel şi $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$. Cum $DC \| AB$, unghiurile $\widehat{DCA}$ şi $\widehat{CAO}$ sunt alterne interne, deci sunt congruente. Din $\widehat{DAC} = \widehat{DCA}$, $\widehat{CAO} = \widehat{ACO}$ şi $\widehat{DCA} = \widehat{CAO}$, rezultă $\widehat{DAC} = \widehat{ACO}$, iar de aici rezultă că $AD \| CO$. Din $AD \| CO$, $AO \| DC$ şi

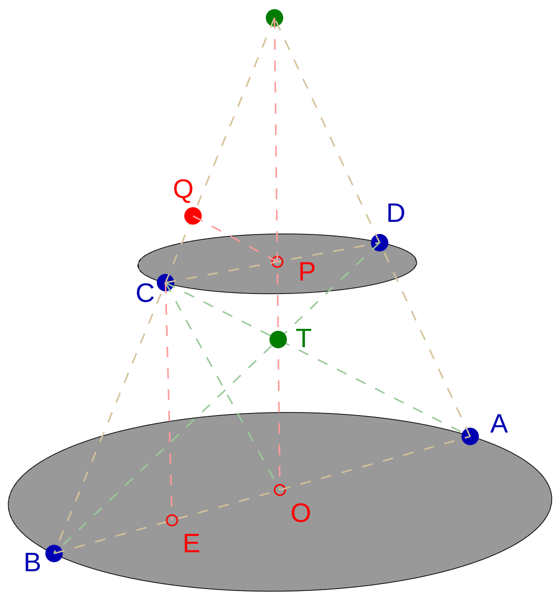

FIGURA . Exercițiul 15.

$AO = OC$, deducem că $ADCO$ este romb şi astfel $DC = AO = 4\ cm$. In consecinţă raza bazei mici este $\frac{4}{2} = 2$.

c. Fie E proiecţia lui C pe AB. Atunci $BE = \frac{AB - CD}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$. Conform teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic ΔBCE, avem $CE = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Deci înălţimea trunchiului este $2\sqrt{3}$ şi atunci $V_{\text{trunchi de con}} = \frac{\pi \cdot 2\sqrt{3}(4^2 + 2^2 + 4 \cdot 2)}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi(16+4+8)}{3} = \boxed{\frac{56\sqrt{3}}{3}\pi}\ cm^3$.

d. Fie P centrul bazei mici, iar Q proiecţia lui P pe BC. Cum $\widehat{PCQ} = \widehat{CBE}$ (unghiuri corespondente) şi $\widehat{PQC} = \widehat{CEB} = 90°$, conform cazului de asemănare unghi-unghi, rezultă că triunghiurile PQC şi CEB sunt asemenea. Atunci $\frac{PQ}{CE} = \frac{PC}{BC}$, de unde $PQ = \frac{CE \cdot PC}{BC} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{4} = \boxed{\sqrt{3}}\ cm$.

CAPITOLUL 4

Varianta 74

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2^5 : 2^3 = 2^2 = \boxed{4}$
2. Cum în urnă sunt în total 26 bile, din care 20 de bile sunt negre, probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să fie neagră este egală cu $\frac{20}{26} = \boxed{\frac{10}{13}}$.
3. $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = \boxed{3}$
4. $\frac{50}{100} \cdot 520 = \boxed{260}$
5. $A_{romb} = \frac{\text{produsul diagonalelor}}{2} = \frac{10 \cdot 15}{2} = \boxed{75}\ cm^2$.
6. $L_{cerc} = 2\pi \cdot r$, de unde $r = \frac{L_{cerc}}{2\pi} = \frac{12\pi}{2\pi} = \boxed{6}\ cm$.
7. $V_{\text{paralelipiped dreptunghic}} = \text{lungimea} \cdot \text{lăţimea} \cdot \text{înălţimea} = 10 \cdot 20 \cdot 40 = \boxed{8000}\ cm^3$.
8. $A_{\text{sferă}} = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 8^2 = \boxed{256}\pi\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ şi } |x| \le 1\} = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ şi } -1 \le x \le 1\} = [-1, 1]$
10. $\boxed{C}$: Dacă $x + \frac{1}{x} = 2$ atunci $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4$. Ridicând la pătrat avem $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 4$, de unde $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 - 2 = 2$.

    Soluţie altenativă: Avem $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 + 1 = 2$.
11. $\boxed{C}$: Cum M este mijlocul lui AB, avem $AM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ΔCAM, avem $CM = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ cm$.

12. $\boxed{B}$: $2(\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ) = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 2 \cdot \frac{-2}{4} = \boxed{-1}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie r numărul de rafturi şi c numărul de cărţi din bibliotecă. Ştim că pe un raft se află 60 de cărţi, iar pe restul de $(r-1)$ se află câte 50 de cărţi. Aceasta revine la $c = 60 + (r-1)50 \quad (1)$. Faptul că în cazul în care se aşează câte 60 de cărţi pe raft, rămân 4 rafturi goala, înseamnă că 60 de cărţi aşezate pe $r-4$ rafturi dau numărul total de cărţi, adică $c = 60(r-4) \quad (2)$. Înlocuind (2) în relaţia (1) obţinem $60 + (r-1)50 = 60(r-4)$ echivalent cu $60 + 50r - 50 = 60r - 240$ sau $10r = 250$, de unde $r = \frac{250}{10} = \boxed{25}$.

b. Folosind punctul precedent avem $c = 60(25-4) = 60 \cdot 21 = \boxed{1260}$ de cărţi.

14. a. Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$, avem

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{x^2+2}{x^2+4x+4} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^2-4}\right) \\ &= \left(\frac{x^2+2}{(x+2)^2} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)(x+2)}\right) \\ &= \frac{x^2+2-x(x+2)}{(x+2)^2} : \frac{x+2-3}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{2-2x}{(x+2)^2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x-1} = \frac{-2(x-1)}{x+2} \cdot \frac{x-2}{x-1} \\ &= \frac{-2(x-2)}{x+2} = \frac{2(2-x)}{x+2} \end{aligned}$$

b. Folosind punctul (a) avem

$$E(\sqrt{2}) \cdot E(-\sqrt{2}) = \frac{2(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2} \cdot \frac{2(2+\sqrt{2})}{-\sqrt{2}+2} = \boxed{4}$$

c. Ecuaţia $E(a) = a + 2$ este echivalentă cu $\frac{2(2-a)}{a+2} = a + 2$, unde $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}$. Aducând la acelaşi numitor, ecuaţia devine $4 - 2a = (a+2)^2$, ceea ce este echivalent cu $a^2 + 4a + 4 - 4 + 2a = 0$, sau $a^2 + 6a = 0$. Dând factor comun obţinem $a(a+6) = 0$, deci soluţiile ecuaţiei sunt $a_1 = \boxed{0} \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$ şi $a_2 = \boxed{-6} \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

15. a.

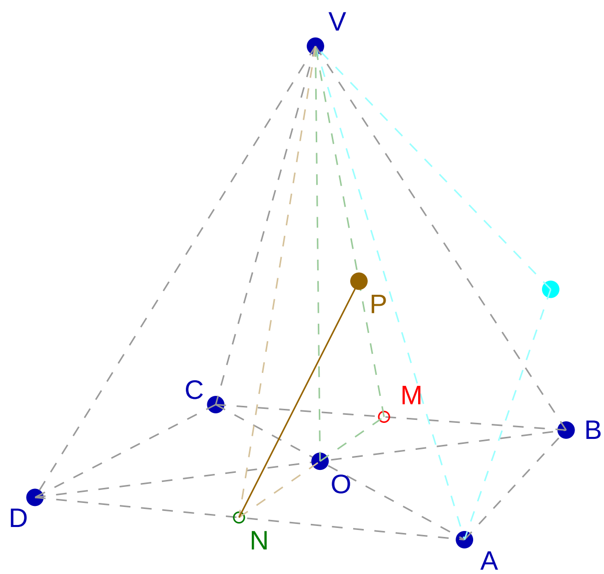

FIGURA . Exercițiul 15.

b. Fie M mijlocul lui BC. Atunci OM este linie mijlocie în triunghiul ABC şi are lungimea egală cu $\frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM avem $VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\ cm$. Prin urmare, $A_l = 4 \cdot A_{VBC} = 4\frac{BC \cdot VM}{2} = 2 \cdot BC \cdot VM = 2 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{5} = \boxed{100\sqrt{5}}\ cm^2$.

c. Fie $OM \cap AD = \{N\}$. Cum $AD \| BC$ şi $BC \in (VBC)$, avem $d(A, (VBC)) = d(N, (VBC))$. Fie P piciorul perpendicularei din N pe VM. Din $NP \perp VM$, $PM \perp BC$, $NM \perp BC$ şi $BC \subset (VBC)$ conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $NP \perp (VBC)$, deci distanţa căutată este NP. Scriind aria în două moduri, $A_{VNM} = \frac{VO \cdot NM}{2} = \frac{NP \cdot VM}{2}$, deducem $VO \cdot NM = NP \cdot VM$, de unde $NP = \frac{VO \cdot NM}{VM} = \frac{10 \cdot 10}{5\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = \boxed{4\sqrt{5}}\ cm$.

d. Unghiul format de VA cu planul (VBC) este unghiul format de VA cu proiecţia sa pe planul (VBC). Notăm acest unghi cu α. În triunghiul dreptunghic format de distanţa de la A la planul (VBC), VA şi proiecţia lui VA pe planul (VBC) avem $\sin\alpha = \frac{d(A, (VBC))}{VA}$. Calculăm VA aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA. Observăm mai întâi că $AO = \frac{AC}{2}$ şi avem $VA = \sqrt{VO^2 + AO^2} = \sqrt{10^2 + (5\sqrt{2})^2} =$

$\sqrt{100 + 50} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}\ cm$. Prin urmare $\sin\alpha = \dfrac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{30}}{30} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{30}}{15}}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 75

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $24 : 4 - 4 = 6 - 4 = \boxed{2}$
2. În urnă avem în total 10 bile din care numai una este numerotată cu 8, deci probabilitatea ca extrăgând la întâmplare o bilă aceasta să fie numerotată cu 8 este egală cu $\boxed{\frac{1}{10}}$.
3. $87 = 21 \cdot 4 + 3$, deci restul împărţirii numărului 87 la 4 este egal cu $\boxed{3}$.
4. Ecuaţia $3x - 1 = 5$ este echivalentă cu $3x = 6$, de unde $x = \frac{6}{3} = \boxed{2}$.
5. Cum $1\,m = 100\,cm$, rezultă că $0,4m = 0,4 \cdot 100\,cm = 40cm$.
6. Perimetrul dreptunghiului cu lungimea $8\ m$ şi lăţimea $5\ m$ este egal cu $2 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 16 + 10 = \boxed{26}\ m$.
7. Din $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$, rezultă $r^3 = \frac{3V_{\text{sferă}}}{4\pi} = \frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi} = 27$, iar de aici $r = 3\ dm$. Diametrul sferei este atunci $2 \cdot 7 = \boxed{6}\,dm$.
8. $A_t = 2(6 \cdot 9 + 6 \cdot 5 + 9 \cdot 5) = 2(54 + 30 + 45) = 2 \cdot 129 = \boxed{258}\ m^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Cum $f(-2) = 2 + 3 = 5$, $f(-1) = 1 + 3 = 4$, $f(0) = 3$, $f(1) = -1 + 3 = 2$ şi $f(2) = -2 + 3 = 1$, mulţimea valorilor funcţiei f este $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
10. $\boxed{A}$: Cum cu viteza de 25 km/oră biciclistul ajunge la destinaţie în 4 ore, rezultă că distanţa parcursă este de $25 \cdot 4 = 100\,km$. Atunci cu o viteză de 20 km/oră, va parcurge cei 100 km în $\frac{100}{20} = 5$ ore.
11. $\boxed{D}$: Raza cercului circumscris unui hexagon regulat este egală cu latura hexagonului, deci $6\ cm$.
12. $\boxed{B}$: Din $EF||NP$, conform teoremei lui Thales avem $\frac{ME}{EN} = \frac{MF}{FP}$, de unde $FP = \frac{EN \cdot MF}{ME} = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4\ cm$. Deci $MP = MF + FP = 8 + 4 = 12\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a numărul elevilor din clasa A şi b numărul elevilor din clasa B. Avem $a+b = 46$. Dacă din clasa B se mută 5 elevi în clasa A, în clasa B rămân $b-5$, iar în clasa A avem $a+5$ elevi. După mutare clasa B are cu 6 elevi mai puţin decât clasa A, adică $(b-5)+6 = a+5$. Aceasta revine la $b+1 = a+5$, sau $b-a = 4 \quad (2)$. Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem $2b = 50$, de unde $b = \frac{50}{2} = 25$ elevi, ceea ce ne dă $a = 46-b = 46-25 = \boxed{21}$ elevi.

    b. De la punctul precedent avem $b = \boxed{25}$.

14. a. Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ avem

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{x}{x-4} + \frac{x-4}{x} - 1\right) : \frac{x^2-4x+16}{2x} \\ &= \frac{x^2+(x-4)^2-x(x-4)}{x(x-4)} \cdot \frac{2x}{x^2-4x+16} \\ &= \frac{x^2+x^2-8x+16-x^2+4x}{x-4} \cdot \frac{2}{x^2-4x+16} \\ &= \frac{x^2-4x+16}{x-4} \cdot \frac{2}{x^2-4x+16} = \frac{2}{x-4} \end{aligned}$$

    b. Inegalitatea $E(x) > 0$ revine la $\frac{2}{x-4} > 0$, sau $x-4 > 0$. De aici $x > 4$, sau $x \in \boxed{(4, \infty)}$.

    c. $E(a) \in \mathbb{Z}$ revine la $\frac{2}{a-4} \in \mathbb{Z}$, ceea ce este echivalent cu faptul că $a-4$ divide 2. Deci $a-4 \in \{-1, 1, -2, 2\}$. Examinăm pe rând acest cazuri. Din $a-4 = -1$ rezultă $a = 3 \in \mathbb{N}$, din $a-4 = 1$ rezultă $a = 5 \in \mathbb{N}$, $a-4 = -2$ rezultă $a = 2 \in \mathbb{N}$ şi $a-4 = 2$ rezultă $a = 6 \in \mathbb{N}$. Deci valorile naturale ale numărului a pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$ sunt $\boxed{\{2, 3, 5, 6\}}$.

15. a.

    b. $A_t = 2\pi r(r+g)$, unde g este generatoarea cilindrului şi r raza bazei. Cum cilindrul este circular drept, generatoarea sa este egală cu înălţimea cilindrului, deci $g = 4\ cm$. Cilindrul se desfăşoară după un dreptunghi a cărui lungime este egală cu lungimea cercului bazei cilindrului, deci $2\pi r = 6\pi$, de unde $r = \frac{6}{3} = 3\ cm$. Prin urmare, $A_t = 2\pi 3(3+4) = 6 \cdot 7\pi = \boxed{42\pi}\ cm^2$.

    c. În triunghiul dreptunghic $\Delta AOO'$, aplicând teorema lui Pitagora avem $AO' = \sqrt{OO'^2 + AO^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5\ cm$. Similar, din triunghiul $\Delta BOO'$ deducem $BO' = 5\,cm$.
    Scriem aria triunghiului $\Delta AO'B$ în două feluri:

$$A_{AO'B} = \frac{OO' \cdot AB}{2} = \frac{AO' \cdot BO' \cdot \sin \widehat{AO'B}}{2}$$

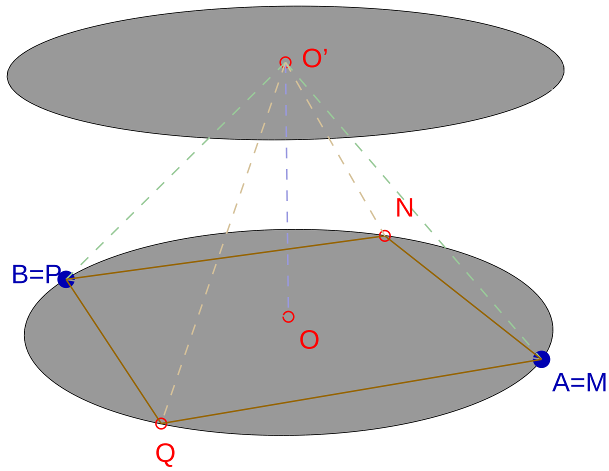

Figura . Exercițiul 15.

De aici, $OO' \cdot AB = AO' \cdot BO' \cdot \sin \widehat{AO'B}$ şi deducem $\sin \widehat{AO'B} = \dfrac{OO' \cdot AB}{AO' \cdot BO'} = \dfrac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} = \boxed{\dfrac{24}{25}}$.

d. Diagonala pătratului $MNPQ$ este diametru în baza mare a cilindrului, adică $MP = 6$. Cum $MP = MN\sqrt{2}$, rezultă $MN = \dfrac{MP}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

Deci $V_{O'MNPQ} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{MNPQ} \cdot O'O = \dfrac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 4 = \boxed{24}\, cm^3$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA EXAMEN.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE LICEU.