BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 66–70

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 66

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = \boxed{16}$
2. Inversul numărului $-\frac{2}{3}$ este numărul $\boxed{-\frac{3}{2}}$.
3. $72 = \boxed{2^3 \cdot 3^2}$
4. Dacă $2\ kg$ de mere costă 8 lei, un kilogram va costa $\frac{8}{2} = 4$ lei. Deci $7\ kg$ de mere vor costa $7 \cdot 4 = \boxed{28}$ lei.
5. Suma a două unghiuri suplementare este $180°$. Deci suplementul unghiului cu măsura $70°$ este unghiul cu măsura $180° - 70° = \boxed{110°}$.
6. Perimetrul triunghiului este egal cu suma lungimilor laturilor triunghiului, adică $3 + 4 + 5 = \boxed{12}\ cm$.
7. AC şi $A'C'$ sunt diagonale în dreptunghiurile $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$. Cum $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ sunt dreptunghiuri congruente, avem că $AC = A'C' = \boxed{15}\ cm$.
8. $V_{con} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot 4}{3} = \frac{81 \cdot 4\pi}{3} = \boxed{108}\pi\ cm^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Căutăm cel mai mare număr natural k cu proprietatea că produsul se divide la 10^k. Acesta este puterea lui 5 din descompunerea în factori primi a produsului, deoarece $10 = 2 \cdot 5$, iar puterea lui 2 este mai mare în descompunerea în factori primi. Număram aşadar câţi factori de 5 există în produs: $5 = 1 \cdot 5$, $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 4 \cdot 5$, $25 = 5 \cdot 5$, $30 = 6 \cdot 5$ şi $35 = 7 \cdot 5$, deci în total 8 factori de 5 (notaţi că 25 contribuie cu doi de 5). Prin urmare produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 34 \cdot 35$ se termină în 8 zerouri.
10. $\boxed{C}$: Din $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$ avem $b = \frac{3a}{5}$. Înlocuind în $a - b = 20$, obţinem $a - \frac{3a}{5} = 20$, ceea ce este echivalent cu $5a - 3a = 100$, sau $2a = 100$, de unde $a = \frac{100}{2} = 50$, iar $b = \frac{3 \cdot 50}{5} = 30$.

11. $\boxed{B}$: Fie D piciorul perpendicularei din D pe AB şi F piciorul perpendicularei din O pe AB. Avem $A_{ABCD} = AB \cdot DE$, iar $A_{AOB} = \dfrac{AB \cdot OF}{2}$. Cum O este mijlocul lui BD şi $OF \| DE$ (perpendiculare pe aceeasi dreaptă AB), rezultă că F este mijlocul lui EB. Deci OF este linie mijlocie în triunghiul EDB şi de aici $OF = \dfrac{DE}{2}$. Astfel $A_{AOB} = \dfrac{AB \cdot \frac{DE}{2}}{2} = \dfrac{AB \cdot DE}{4} = \dfrac{A_{ABCD}}{4} = \dfrac{24}{4} = 6\ cm^2$.

12. $\boxed{A}$: În triunghiul dreptunghic BAC avem $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$, sau $\cos 30^\circ = \dfrac{AC}{BC}$, de unde $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Deoarece

$$\begin{aligned} N &= \overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} \\ &= (100x + 10y + z) + (100y + 10z + x) + (100z + 10x + y) \\ &= 111x + 111y + 111z = 111(x + y + z) \end{aligned}$$

rezultă că N este divizibil cu 111.

b. Conform punctului precedent

$$N = 111(x + y + z) = 3 \cdot 37 \cdot (x + y + z)$$

Dar $3 = 1+1+1 \le x+y+z \le 9+9+9 = 27$, deci $x+y+z$ nu este divizibil cu 37 care este număr prim. Astfel N se divide cu 37 şi nu se divide cu 37^2. Deci N nu poate fi pătrat perfect.

14. a. Pentru $a = 3$, $b = -4$ şi $c = 1$ avem $E(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Ecuaţia $E(x) = 0$ se poate scrie $3x^2 - 3x - x + 1 = 0$, echivalent cu $3x(x-1) - (x-1) = 0$, sau $(x-1)(3x-1) = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $3x - 1 = 0$. Deci soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = \boxed{0}$ sau $x_2 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

b. Pentru $a = b = 1$ şi $c = -1$ avem $E(x) = x^2 + x - 1$, iar ecuaţia $|E(x) - x^2| + |E(x) - x| = 0$ devine $|x^2 + x - 1 - x^2| + |x^2 + x - 1 - x| = 0$, ceea ce este echivalent cu $|x - 1| + |x^2 - 1| = 0$. Descompunând în factori, obţinem $|x-1| + |x-1| \cdot |x+1| = 0$, sau $|x-1|(1 + |x+1|) = 0$. Cum $1 + |x+1| > 0$, ecuaţia se reduce la $|x - 1| = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $\boxed{x = 1}$.

c. Pentru $a = b = 4$ şi $c = 5$, avem $E(x) = 4x^2 + 4x + 5 = 4x^2 + 4x + 1 + 4 = (2x+1)^2 + 4$. Cum $(2x+1)^2 \ge 0$, egalitatea având loc pentru $x = -\dfrac{1}{2}$, $E(x)$ are valoarea minimă $\boxed{4}$.

15. a.

b. Fie O centrul pătratului $ABCD$. Din $A'D = A'B$ (diagonale în pătrate congruente), rezultă că triunghiul $A'BD$ este isocel. Cum într-un triunghi isocel mediana este şi înălţime, rezultă că $A'O \perp BD$. Deci distanţa de

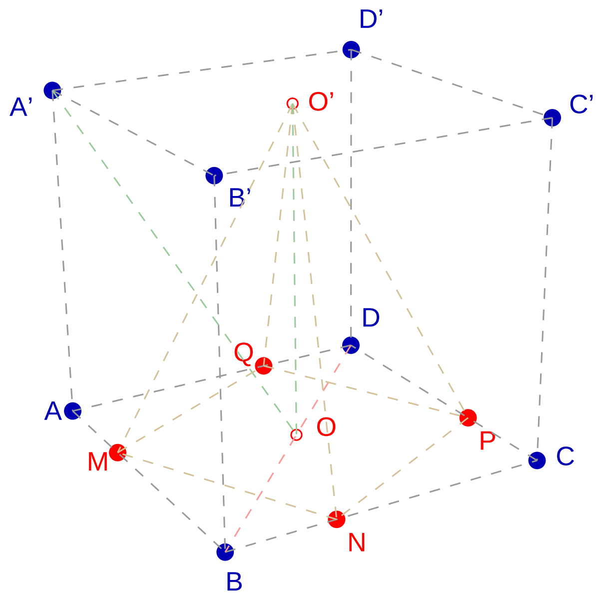

FIGURA . Exercițiul 15.

la A' la BD este $A'O$. Deoarece AC este diagonala pătratului $ABCD$ de latură 6, avem $AC = 6\sqrt{2}$ şi $AO = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'AO$ avem $A'O = \sqrt{AA'^2 + AO^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 + 18} = \sqrt{54} = \boxed{3\sqrt{6}}\ cm$.

c. În pătratul $ABCD$, din $AM = BN = CP = DQ$ rezultă că $MB = NC = PD = QA$. Din $AM = BN = CP = DQ$ şi $QA = MB = NC = PD$, conform cazului de congruenţă catetă-catetă, rezultă că triunghiurile dreptunghice AMQ, BNM, CPN şi DQP sunt congruente. De aici $MN = NP = PQ = QM$ şi prin urmare $MNPQ$ este romb. Din congruenţă triunghiurilor AMQ şi BNM avem că $\widehat{AMQ} = \widehat{BNM}$. Cum $\widehat{BMN} + \widehat{BNM} = 90°$ (suma unghiurilor ascuţite ale unui triunghi dreptunghic) deducem că $\widehat{BMN} + \widehat{AMQ} = 90°$. De aici, $\widehat{NMQ} = 180° - (\widehat{BMN} + \widehat{AMQ}) = 180° - 90° = 90°$. În concluzie, $MNPQ$ fiind romb cu un unghi drept, este pătrat.

d. Cum $OO' \perp (ABCD)$ şi $(MNPQ) \subset (ABCD)$ rezultă că $OO' \perp (MNPQ)$. Deci $V_{VMNPQ} = \frac{1}{3}A_{MNPQ} \cdot OO' = \frac{1}{3} \cdot MQ^2 \cdot OO'$. În triunghiul dreptunghic MAQ avem $AM = 2$ şi $AQ = 4$. Aplicând teorema lui Pitagora avem $MQ = \sqrt{AM^2 + AQ^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Deci, $V_{VMNPQ} = \frac{1}{3} \cdot (2\sqrt{5})^2 \cdot 6 = 40$, iar $V_{ABCDA'B'C'D'} = AB^3 = 6^3 = 216$ şi astfel $\frac{V_{ABCDA'B'C'D'}}{V_{VABCD}} = \frac{216}{40} = \boxed{\frac{27}{5}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 67

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $30 - 15 : 3 = 30 - 5 = \boxed{25}$
2. $\frac{20}{100} \cdot 150 = \boxed{30}$
3. $f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = \boxed{-1}$
4. Următorul termen al sirului 1, 4, 7, 10, 13,... este $\boxed{16}$.
5. Suma a două unghiuri complementare este 90, deci complementul unghiului cu măsura 60° este unghiul cu măsura $\boxed{30^\circ}$.
6. Aria dreptunghiului cu lungimea 15 cm şi lăţimea 12 cm este egală cu $12 \cdot 15 = \boxed{180}\,\text{cm}^2$.
7. $V_{cilindru} = \pi \cdot r^2 \cdot g = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = \boxed{288}\pi\,\text{cm}^3$.
8. Fia a muchia cubului. Aria unei feţe este egală cu a^2, iar conform ipotezei aria este $49\ cm^2$. Avem deci relaţia $a^2 = 49$, de unde $a = 7$. Prin urmare, suma tuturor muchiilor cubului este egală cu $12 \cdot 7 = \boxed{84}$ (un cub are 12 muchii).

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Dacă 24 caiete costă 60 de lei, un caiet costă $\frac{60}{24} = \frac{5}{2}$ lei. Deci 16 caiete vor costa $\frac{5}{2} \cdot 16 = 40$ lei.
10. $\boxed{B}$: $b^2 + 2a = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{6} = 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{6} = 5$.
11. $\boxed{C}$: $A_{disc} = \pi r^2 = 16\pi$, de unde $r = \sqrt{16} = 4$, iar diametrul este egal cu $2r = 2 \cdot 4 = 8\ cm$.
12. $\boxed{B}$: $\text{Aria}_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sin 135^\circ}{2} = 15\sqrt{2} \sin 45^\circ = 15\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cel mai mic multiplu comun al numerelor $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$ şi $18 = 2 \cdot 3^2$ este egal cu $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = \boxed{180}$

b. Fie n numărul natural căutat. Observaţia importantă este că $n + 6$ va avea restul 0 la împărţirea cu fiecare din numerele 12, 15 şi 18. Cea mai mică valoare pe care $n + 6$ o poate lua atunci este cel mai mic multiplu comun al numerelor 12, 15 şi 18, adică 180. Deci $n = 180 - 6 = \boxed{174}$.

14. a. Pentru $m = 2$ ecuaţia devine $2x^2 + 3x + 1 = 0$, ecuaţie care se rescrie $2x^2 + 2x + x + 1 = 0$, sau $2x(x + 1) + (x + 1) = 0$. Dând $x + 1$ factor comun obţinem $(x+1)(2x+1) = 0$, de unde $x+1 = 0$ sau $2x+1 = 0$. Deci soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = \boxed{-1}$, $x_2 = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

b. Cum $x = 3$ satisface ecuaţia, obţinem $m \cdot 3^2 + (2m - 1) \cdot 3 + m - 1 = 0$, ceea ce este echivalent cu $9m + 6m - 3 + m - 1 = 0$, sau $16m - 4 = 0$. De aici $m = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

c. Aranjăm ecuaţia $mx^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ după m. După eliminarea parantezelor avem $mx^2 + 2mx - x + m - 1 = 0$ ceea ce se poate scrie $m(x^2 + 2x + 1) - x - 1 = 0$, sau $m(x + 1)^2 - (x + 1) = 0$. Dând $x + 1$ factor comun, ecuaţia devine $(x + 1)[m(x + 1) - 1] = 0$ şi acum se vede imediat că $x = \boxed{-1}$ este rădăcină pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

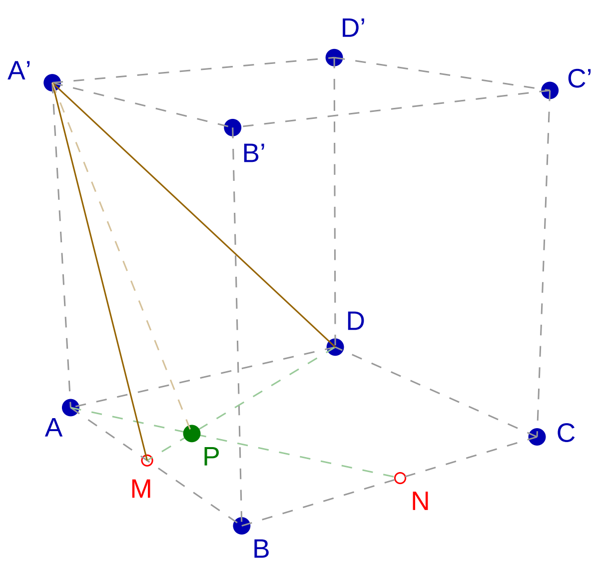

Figura . Exerciţiul 15.

15. a.

b. În triunghiurile dreptunghice ABN şi DAM avem $AD = BC$ şi $AM = BN$. Conform cazului de congruenţa catetă-catetă rezultă că triunghiurile ABN şi DAM sunt congruente. De aici $\widehat{BAN} = \widehat{ADM}$. Folosind $\widehat{ADM} + \widehat{AMD} = 90°$ (suma unghiurilor ascuţite ale unui triunghi dreptunghic este $90°$) rezultă că $\widehat{BAN} + \widehat{AMD} = 90°$. Notând $AN \cap DM = \{P\}$, în triunghiul APM avem $\widehat{APM} = 180° - (\widehat{AMP} + \widehat{PAM}) = 180° - 90° = 90°$, de unde rezultă că $AN \perp DM$.

c. Fie m muchia cubului. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DAM, avem: $DM^2 = AD^2 + AM^2$ ceea ce este echivalent cu $(2\sqrt{5})^2 = m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$, sau $20 = m^2 + \frac{m^2}{4}$. Aducând la acelasi numitor obţinem $80 = 5m^2$, care după simplificare ne dă $m^2 = 16$, de unde $m = 4$. Prin urmare, $A_t = 6 \cdot A_{ABCD} = 6 \cdot AB^2 = 6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = \boxed{96}\ cm^2$.

d. Din $AA' \perp (ABCD)$, $AP \perp DM$ şi $DM \subset (ABCD)$ rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că $A'P \perp DM$. Atunci $\text{Aria}_{A'MD} = \frac{A'P \cdot DM}{2}$ şi avem nevoie de lungimea lui $A'P$.

Cum AP este înălţime în triunghiul dreptunghic DAM, avem $AP = \frac{AD \cdot AM}{DM} = \frac{4 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

În triunghiul dreptunghic $A'AP$, aplicând teorema lui Pitagora, $A'P = \sqrt{AA'^2 + AP^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{16}{5}} = 4\sqrt{\frac{6}{5}}$. Avem atunci, $A_{A'MD} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{5}}}{2} = 4\sqrt{6}\ cm^2$.

Demonstrăm in continuare că $4\sqrt{6} \in (9, 10)$, sau $9 < 4\sqrt{6} < 10$. Ridicând la pătrat avem inegalităţile echivalente $9^2 < (4\sqrt{6})^2 < 10^2$, sau $81 < 96 < 100$. Evident adevărat, deci $4\sqrt{6} \in (9, 10)$.

CAPITOLUL 3

Varianta 68

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $5 - 20 : 5 = 5 - 4 = \boxed{1}$
2. Porţiunea înnegrită reprezintă $100\% - 40\% - 20\% = \boxed{40\%}$ din disc.
3. Cel mai mic număr întreg mai mare decât $3,7$ este egal cu $\boxed{4}$.
4. Mulţimea A are 5 elemente dintre care 3 sunt numere negative, deci probabilitatea ca alegând la întâmplare un element aceasta să fie număr negativ este $\boxed{\frac{3}{5}}$.
5. $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC}$, iar triunghiul ABC este congruent cu triunghiul ADC, deci $A_{ABC} = \frac{A_{ABCD}}{2} = \frac{12}{2} = \boxed{6}\ cm^2$.
6. Perimetrul este $2AB + 2BC = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 8 + 12 = \boxed{20}\ cm$.
7. $V_{con} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = 12 \cdot 8\pi = \boxed{96}\pi\,\mathrm{cm}^3$.
8. Diagonala cubului cu muchia 10 are lungimea egală cu $\boxed{10\sqrt{3}}\ cm$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Media aritmetică numerelor a^2, b^2 şi $2ab$ este $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{3} = \frac{(a+b)^2}{3} = \frac{6^2}{3} = \frac{36}{3} = 12$.
10. $\boxed{D}$: $\sqrt{(-5-7)^2} : \sqrt{(5-7)^2} = \sqrt{\frac{(-12)^2}{(-2)^2}} = \sqrt{\left(\frac{-12}{-2}\right)^2} = \sqrt{6^2} = 6$
11. $\boxed{B}$: Pentru calcularea perimetrului avem nevoie de lungimea bazei mari CD. Fie P piciorul perpendicularei din A pe CD şi Q piciorul perpendicularei din B pe CD. Avem $CD = CQ + QP + PD$. Cum $BC = AD$ (trapezul $ABCD$ este isocel) rezultă că proiecţiile lor pe CD sunt egale, adică $CQ = DP$. În triunghiul dreptunghic APD ştim că măsura unghiului $\widehat{ADP}$ este egală cu $60°$, de unde rezultă că măsura unghiului $\widehat{DAP} = 30°$. Cum cateta care se opune unghiului de $30°$ este jumătate din ipotenuză avem că $DP = \frac{AD}{2} = \frac{4}{2} = 2\ cm$.

Deci $CD = CQ + QP + PD = 2 + 4 + 2 = 8$, iar perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu $AB + BC + CD + DA = 4 + 4 + 8 + 4 = 20\ cm$.

12. $\boxed{C}$: Fie P proiecţia lui M pe AC. În triunghiul dreptunghic APM, măsura unghiului $\widehat{MAP}$ este egală cu $45°$, deci avem $\sin\widehat{MAP} = \frac{PM}{AM}$, de unde $PM = \sin\widehat{MAP} \cdot AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1\ cm$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie e numărul elevilor din clasă şi b numărul băncilor. Ştim că atunci când stau câte 2 elevi într-o bancă un elev stă singur în bancă, iar 2 bănci rămân libere. Deci avem câte 2 elevi în $b-3$ bănci şi un elev singur într-o bancă, adică

$$e = 2(b-3) + 1 \quad (1)$$

Din a doua parte a ipotezei ştim că dacă stau câte 3 elevi în bancă, şase bănci rămân libere. Acesta înseamnă că avem câte 3 elevi în $b-6$ bănci, adică

$$e = 3(b-6) \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă $2(b-3)+1 = 3(b-6)$, ceea ce este echivalent cu $2b - 6 + 1 = 3b - 18$, sau $3b - 2b = 18 + 6 - 1$. Deci numărul băncilor este $b = \boxed{13}$.

b. De la punctul (a) avem $e = 2(b-3) + 1 = 2 \cdot 10 + 1 = \boxed{21}$ de elevi.

14. a. Avem $(x^2+4x+3)(x-1) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 3x - 3 = x^3 + 3x^2 - x - 3$, iar $(x^2+2x-3)(x+1) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 3x - 3 = x^3 + 3x^2 - x - 3$, de unde rezultă că $(x^2+4x+3)(x-1) = (x^2+2x-3)(x+1)$.

b. De la punctul precedent, avem $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3} = \frac{x+1}{x-1}$ şi atunci pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{-3, -1, 1\}$ avem

$$\begin{aligned}
F(x) &= \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3} - \frac{2}{x+1} - \frac{7}{x^2-1}\right) : \frac{1}{x^2-1} \\
&= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{7}{(x-1)(x+1)}\right) \cdot (x^2-1) \\
&= \frac{(x+1)^2 - 2(x-1) - 7}{(x-1)(x+1)} \cdot (x-1)(x+1) \\
&= x^2 + 2x + 1 - 2x + 2 - 7 = x^2 - 4 \\
&= (x-2)(x+2)
\end{aligned}$$

c. $F(a) = a - 2$, revine la $(a-2)(a+2) = a - 2$ ceea ce este echivalent cu $(a-2)(a+2) - (a-2) = 0$. Dând factor comun, obţinem $(a-2)(a+2-1) = 0$, sau $(a-2)(a+1) = 0$. Rezultă $a - 2 = 0$ sau $a + 1 = 0$, de unde $a_1 = 2$, sau

$a_2 = -1$. Cum $a \in \mathbb{R} - \{-3, -1, 1\}$ singura soluţie a ecuaţiei $F(a) = a - 2$ este $a = \boxed{2}$.

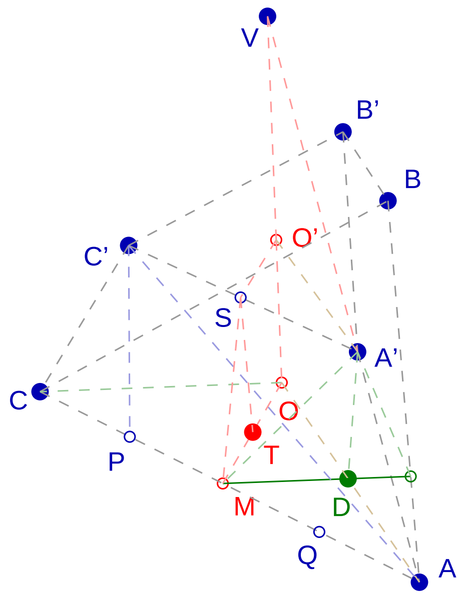

Figura . Exerciţiul 15.

15. a.
b. Fie P piciorul perpendicularei din C' pe AC, Q piciorul perpendicularei din A' pe AC. Cum $AA' = CC'$ proiecţiile lor pe AC sunt egale, adică $AQ = CP = \dfrac{AC - PQ}{2} = \dfrac{6-3}{2} = \dfrac{3}{2}$. Prin urmare $AP = AC - CP = 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic APC', avem $C'P = \sqrt{AC'^2 - AP^2} = \sqrt{(\sqrt{37})^2 - \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{37 - \dfrac{81}{4}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 37 - 81}{4}} = \sqrt{\dfrac{148 - 81}{4}} = \dfrac{\sqrt{67}}{2}$.
Fie O centrul de greutate al triunghiului ABC, iar O' al lui $A'B'C'$. Atunci OO' este înălţimea trunchiului. Fie de asemenea S mijlocul lui $A'C'$. Cum SM este congruentă cu $C'P$, are lungimea egală cu $\dfrac{\sqrt{67}}{2}$. În trapezul dreptunghic $O'OMS$, ducem perpendiculara din S pe OM şi aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul STM avem $ST = \sqrt{SM^2 - MT^2}$ (1). Cum O este centrul de greutate al triunghiului echilateral ABC, avem $OM = \dfrac{1}{3} \cdot BM = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. În mod similar $O'S = \dfrac{1}{3} \cdot B'S = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare, $MT = OM - OT = OM - O'S = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Revenind la relaţia (1) avem $ST = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{67}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{67}{4} - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$. Deci $OO' = ST = 4\ cm$.

c. Fie $VABC$ piramida din care provine trunchiul. Din $A'O' \| AO$ rezultă că triunghiurile $VO'A'$ şi VOA sunt asemenea, de unde avem $\frac{VO'}{VO} = \frac{A'O'}{AO}$ (2). Cum O este centrul de greutate al triunghiului ABC, avem $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Similar, $A'O' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Revenind la relaţia (2) avem $\frac{VO'}{VO} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ sau $\frac{VO'}{VO} = \frac{1}{2}$. Făcând proporţii derivate avem: $\frac{VO'}{VO - VO'} = \frac{1}{2-1}$ ceea ce este echivalent cu $\frac{VO'}{OO'} = 1$, de unde $VO' = OO'$. Deci $VO = VO' + O'O = OO' + OO' = 2OO' = 2 \cdot 4 = 8\ cm$.
Prin urmare $V_{VABC} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC \cdot BM}{2} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 8 = 3\sqrt{3} \cdot 8 = \boxed{24\sqrt{3}}\ cm^3$.

d. Avem $A'D \perp (ABC)$. Demonstrăm că $D \in AO$. Presupunem că $D \notin AO$ şi fie R piciorul perpendicularei din A' pe AO. Cum $A'R \| OO'$ şi $OO' \perp (ABC)$ rezultă că $A'R \perp (ABC)$, deci R coincide cu D.
Cum $A'O'OD$ este dreptunghi avem $DO = A'O' = \sqrt{3}$. Am văzut că $AO = 2\sqrt{3}$ şi cum $DO = \sqrt{3}$, rezultă că D este mijlocul lui AO. Din D mijlocul lui AO şi M mijlocul lui AC avem că MD este linie mijlocie în triunghiul AOC. Cum $CO \perp AB$ şi $MD \| CO$ rezultă că $AB \perp MD$. În plus $AB \perp A'D$ deoarece am văzut că $A'D \perp (ABC)$ şi deci este perpendiculară pe orice dreaptă din plan, deci şi pe AB. Din $AB \perp A'D$ şi $AB \perp MD$ rezultă $AB \perp (A'MD)$.

CAPITOLUL 4

Varianta 69

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2 \cdot 8 - 6 = 16 - 6 = \boxed{10}$
2. $\frac{7}{8} + \frac{9}{8} = \frac{7+9}{8} = \frac{16}{8} = \boxed{2}$
3. Media aritmetică a numerelor 7 şi 11 este $\frac{7+11}{2} = \frac{18}{2} = \boxed{9}$.
4. 40% din 15 este $\frac{40}{100} \cdot 15 = \boxed{6}$.
5. Fie M mijlocul laturii BC şi fie N punctul de intersecţie al mediatoarei dusă prin M cu latura AB. Triunghiul BMN este triunghi dreptunghic şi cum unul unghiul $\widehat{BNM}$ are măsura $67°$, unghiul $\widehat{ABC}$ are măsura egală cu $90° - 67° = \boxed{23°}$.
6. Latura hexagonului regulat este egală cu raza cercului circumscris hexagonului, iar AD este diametru în cercul circumscris hexagonul deci are lungimea egală cu dublul razei cercului, adică $2 \cdot AB = 2 \cdot 5 = \boxed{10}\ cm$.
7. $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = \boxed{36}\pi\,\text{cm}^3$.
8. $A_t = 4 \cdot A_{\text{feţe}} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 60°}{2} = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{9\sqrt{3}}\ cm^2$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Ecuaţia $5x^2 + 3x - 2 = 0$ se rescrie $5x^2 + 5x - 2x - 2 = 0$ sau $5x(x+1) - 2(x+1) = 0$. Dând $x + 1$ factor comun obţinem $(x+1)(5x-2) = 0$ ceea ce este echivalent cu $x + 1 = 0$ sau $5x - 2 = 0$. De aici $x_1 = -1$ sau $x_2 = \frac{2}{5}$. Prin urmare soluţia pozitivă a ecuaţiei $5x^2 + 3x - 2 = 0$ este $x_2 = \frac{2}{5}$.
10. $\boxed{A}$: Deoarece 1 ml este $1\,\text{cm}^3$, volumul cutiei este egal cu $250\ cm^3$.
11. $\boxed{B}$: Diagonala pătratului este egală cu diametrul cercului circumscris pătratului, iar pe de altăparte este egală cu $a\sqrt{2}$, unde a este lungimea latura pătratului.

Avem deci relaţia $a\sqrt{2} = 8$, de unde $a = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, iar perimetrul pătratului este egal $4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

12. $\boxed{B}$: Dacă a este lungimea laturii triunghiului echilateral de arie $27\ cm^2$, avem relaţia $27 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. După ce latura triunghiului se măreşte de 3 ori, lungimea laturii devine $3a$, iar aria $\dfrac{3a \cdot 3a \cdot \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4} = 9 \cdot 27 = 243\ cm^2$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Media vârstelor elevilor din echipa de fotbal este egală cu

$$\frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 13 + 1 \cdot 14}{2+3+4+2+1} = \frac{20+33+48+26+14}{12} = \frac{141}{12},$$

adică $\boxed{11,75 \text{ ani} = 11 \text{ ani şi } 9 \text{ luni}}$.

b. Fie n numărul elevilor de 13 ani din echipa a cărei medie de vârstă este 12 ani. Avem deci

$$\frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 12 + n \cdot 13 + 1 \cdot 14}{2+3+4+n+1} = 12$$

ceea ce este echivalent cu $\dfrac{20+33+48+13n+14}{10+n} = 12$, sau $\dfrac{115+13n}{10+n} = 12$. Atunci $115 + 13n = 120 + 12n$, de unde $n = 5$. Cum în echipă erau deja 2 elevi cu vârsta de 13 ani, au fost adăugaţi $5 - 2 = \boxed{3}$ elevi.

14. a. $f(-1) = (1-\sqrt{3}) \cdot (-1) - \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = \boxed{-1}$

b. $f(x) + 1 \geq 0$ este echivalentă cu $(1-\sqrt{3})x - \sqrt{3} + 1 \geq 0$ echivalent cu $(1-\sqrt{3})x + (1-\sqrt{3}) \geq 0$ sau cu $(1-\sqrt{3})(x+1) \geq 0$. Cum $1 - \sqrt{3} \leq 0$, rezultă că $x + 1 \leq 0$, de unde $x \leq -1$ sau $x \in \boxed{(-\infty, -1]}$.

c. Rescriem

$$\begin{aligned} f(a+1) &= (1-\sqrt{3})(a+1) - \sqrt{3} \\ &= a - a\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= (a+1) + \sqrt{3}(-2-a) \end{aligned}$$

Deci $f(a+1) = b\sqrt{3}$ revine la $(a+1) + \sqrt{3}(-2-a) = b\sqrt{3}$, de unde avem $a + 1 = 0$ şi $-2 - a = b$. Prin urmare, $a = \boxed{-1}$ şi $b = -2 + 1 = \boxed{-1}$.

15. a.

b. Cum piramida este regulată rezultă că triunghiul ABC este echilateral şi cum $BC = AD$, avem că toate muchiile piramidei sunt congruente şi au lungimea 6 cm. Fie O piciorul perpendicularei din D pe (ABC) şi fie $AO \cap BC = P$. Atunci AP este mediană şi înălţime în triunghiul

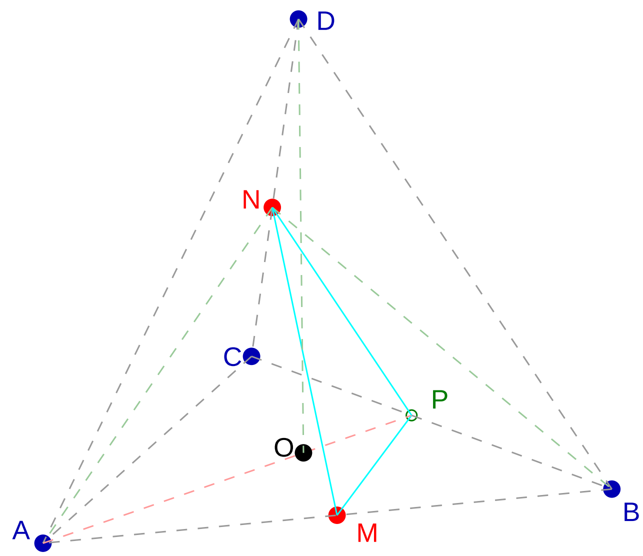

Figura . Exercițiul 15.

echilateral ABC şi are lungimea $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm. Cum O este centrul de greutate al triunghiul ABC, O se găseşte la $\frac{2}{3}$ de vârfurile triunghiului, deci $AO = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DOA avem $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36-12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ cm. Deci, $VABCD = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = \boxed{18\sqrt{2}}\ cm^3$.

c. Cum N este mijlocul lui DC şi cum triunghiul ADC este echilateral rezultă că mediana AN este şi înălţime, deci $AN \perp DC$. Similar, avem $BN \perp DC$. Din $DC \perp AN$ şi $DC \perp BN$ avem că DC perpendiculară pe două drepte concurente din planul (ANB) deci $DC \perp (ANB)$. Prin urmare, distanţa de la C la planul (ABN) este CN care are lungimea egală cu $\boxed{3}$ cm.

d. M fiind mijlocul lui AB şi P mijlocul lui BC rezultă că MP este linie mijlocie în triunghiul ABC şi deci $MP || AB$ şi $MP = \frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm. Deci unghiul dintre AC şi MN este unghiul dintre MP şi MN adică unghiul $\widehat{NMP}$. NP este linie mijlocie în triunghiul CBD şi are lungimea egală cu $\frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Din $NP = MP = 3$ avem că triunghiul MPN este isocel. În triunghiul isocel MCD ($DM = MC = 3\sqrt{3}$), N este mijlocul lui DC şi cum mediana este şi înălţime avem că $MN \perp DC$. În triunghiul dreptunghic MNC aplicând teorema lui Pitagora avem: $MN =$

$\sqrt{MC^2 - NC^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{27-9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. În triunghiul MPN avem $MN^2 = MP^2 + NP^2$ deoarece $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 + 3^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul MPN este dreptunghic. În concluzie, triunghiul MPN este dreptunghic isoscel, de unde rezultă că măsura unghiului $\widehat{NMP}$ este de $\boxed{45°}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 70

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. Numărul cu 257 mai mic decât 300 este $300 - 257 = \boxed{43}$.
2. Media aritmetică a numerelor 3 şi 5 este egală cu $\frac{3+5}{2} = \boxed{4}$.
3. Numărul care împărţit la 7 dă câtul 10 şi restul 4 este egal cu $10 \cdot 7 + 4 = \boxed{74}$.
4. Jumătatea numărului 100 este numărul $\frac{100}{2} = \boxed{50}$.
5. Latura pătratului a cărui diagonală are lungimea $7\sqrt{2}$ este egală cu $\boxed{7}$.
6. $A_{disc} = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = \boxed{16}\pi\,\mathrm{cm}^2$.
7. Fie $VABC$ piramida triunghiulara regulată, VO înălţimea piramidei şi OM apotema bazei, unde $M \in AC$. Apotema piramidei este VM şi se afla prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOM:
   $VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \boxed{5}$ cm.
8. Cum secţiunea axială a cilindrului este pătrat, latura pătratului este egală cu diametrul bazei şi cu generatoarea(înălţimea) cilindrului. Deci raza bazei cilindrului este egală cu $\frac{8}{2} = 4\ cm$. Prin urmare, $A_l = 2\pi rg = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = \boxed{64}\pi\,\mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, deci divizorii naturali de forma $\overline{ab}$ ai lui 165 sunt 11, 15, 33 şi 55, iar suma lor este egală cu $11 + 15 + 33 + 55 = 114$.
10. $\boxed{B}$: Avem $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 3\} = \{x | x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, deci A are 7 elemente.
11. $\boxed{D}$: Cea de-a doua catetă a triunghiului dreptunghic are lungimea egală cu $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$, iar aria triunghiului dreptunghic este egală cu $\frac{5 \cdot 12}{2} = 30\ cm^2$.
12. $\boxed{B}$: Dacă punctele A, B şi C sunt coliniare (în această ordine), atunci măsura unghiului $\widehat{ABC}$ este egală cu $180°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Avem $3,(759) = 3,759759759...$
Prima cifră după virgulă, a patra cifră după virgulă, a şaptea cifră după virgula, şamd, sunt 7. Mai precis pe poziţiile care împărţite la 3 dau restul 1 vom avea totdeauna 7.
A două cifră după virgulă, a cincea cifră după virgulă, a opta cifră după virgulă, şamd, sunt 5. Mai precis pe poziţiile care împărţite la 3 dau restul 2 vom avea mereu cifra 5.
A treia cifră după virgula, a şasea cifră după virgulă, a nouă cifră după virgulă, şamd, sunt 9. Mai precis pe poziţiile care împărţite la 3 dau restul 0 vom aveam mereu cifra 9.
Cum restul împărţirii lui 8 la 3 este 2, înseamnă că pe poziţia a opta (a opta zecimală) vom avea cifra $\boxed{5}$.
b. Cum 2007 este divizibil cu 3, rezultă că a 2007-a zecimală este egală cu $\boxed{9}$.

14. a. Ecuaţia $x(x+4) = 12$ este echivalentă cu $x^2+4x-12 = 0$, sau $(x^2-4)+(4x-8) = 0$. Cum $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, ecuaţia devine $(x-2)(x+2)+4(x-2) = 0$, ceea ce este echivalent cu $(x-2)(x+2+4) = 0$, adică $(x-2)(x+6) = 0$. Deci $x-2 = 0$, sau $x+6 = 0$ şi soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = \boxed{2}$ şi $x_2 = \boxed{-6}$.
b. Pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, avem $E(a) = \left(\frac{1}{9a} - \frac{1}{a^3}\right) \cdot 9a^4 = \frac{a^2-9}{9a^3} \cdot 9a^4 = a(a^2-9)$.
Pentru $a \in \mathbb{Z}$ rezultă că $a^2 - 9 \in \mathbb{Z}$, deci $a(a^2-9) \in \mathbb{Z}$ şi astfel $E(a) \in \mathbb{Z}$.
c. Conform punctului (b), $\left(\frac{1}{9x} - \frac{1}{x^3}\right) \cdot 9x^4 = x(x^2-9)$. Atunci $\left(\frac{1}{9x} - \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{9x^4}{x^3+6x^2+9x} = \frac{x(x^2-9)}{x(x^2+6x+9)} = \frac{x(x-3)(x+3)}{x(x+3)^2} = \frac{x-3}{x+3}$.

15. a.
b. Fie M piciorul perpendicularei din V pe AB. Atunci VM este apotema piramidei şi conform ipotezei lungimea ei este egală cu $4\sqrt{3}\ cm$. Din $A_l = 6 \cdot A_{VAB} = 6 \cdot \frac{VM \cdot AB}{2} = 3 \cdot VM \cdot AB$, deducem $AB = \frac{A_l}{3VM} = \frac{48\sqrt{3}}{3 \cdot 4\sqrt{3}} = \boxed{4}\ cm$.
c. Dacă O este proiecţia lui V pe planul $(ABCDEF)$, atunci $V_{VABCDEF} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCDEF} \cdot VO$.
Cum triunghiul AOB este echilateral ($AO = OB = AB$) avem $A_{AOB} = \frac{AO \cdot BO \cdot \sin 60°}{2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3}\ cm^2$. Prin urmare, $A_{ABCDEF} = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\ cm^2$.
În triunghiul dreptunghic VMA aplicând teorema lui Pitagora avem $VA = \sqrt{VM^2 + AM^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{48+4} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\,\mathrm{cm}$. Aplicăm

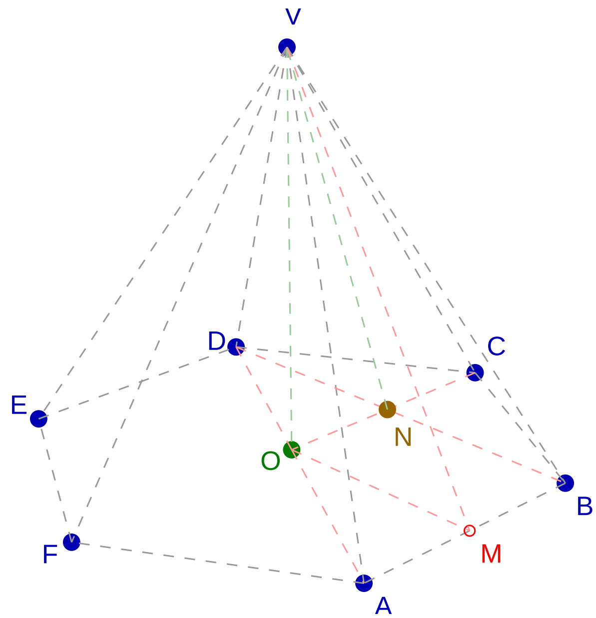

FIGURA . Exerciţiul 15.

teorema lui Pitagora şi în triunghiul dreptunghic VOA şi găsim $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 4^2} = \sqrt{52 - 16} = \sqrt{36} = 6\ cm$.

Deci, $V_{VABCDEF} = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 6 = \boxed{48\sqrt{3}}\ cm^3$.

d. Fie N proiecţia lui V pe BD. Din $VO \perp (ABCDEF)$, $VN \perp BD$ şi $BD \subset (ABCDEF)$ rezultă conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare că $ON \perp BD$. Cum $ON \perp BD$ şi $VN \perp BD$ rezultă că unghiul format de planele (VBD) şi $(ABCDEF)$ este unghiul $\widehat{VNO}$. În triunghiul dreptunghic VON avem $\sin\widehat{VNO} = \frac{VO}{VN}$. Pentru valoarea sinusului unghiului $\widehat{VNO}$ avem deci nevoie de VN. Din $VB = VD$ rezultă că triunghiul VBD este isoscel, iar VN este înălţime. Cum triunghiul este isocel, rezultă că VN este şi mediană deci N este mijlocul lui BD. În triunghiul ABD, OM este linie mijlocie şi deci $OM = \frac{BD}{2}$, de unde $BD = 2OM$. De asemenea OM este înălţime în triunghiul echilateral AOB şi are lungimea egală cu $\frac{4\sqrt{3}}{2}$, deci $BD = 2OM = 4\sqrt{3}$, iar $BN = \frac{BD}{2} = 2\sqrt{3}$. În triunghiul dreptunghic VNB aplicând teorema lui Pitagora avem: $VN = \sqrt{VB^2 - NB^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{52 - 12} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Prin urmare $\sin\widehat{VNO} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$.

Pro Didactica vă urează succes la examen.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de liceu.