BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 56–60

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

Capitolul 1. Varianta 56	3
1. Subiectul I.	3
2. Subiectul II.	3
3. Subiectul III.	3
Capitolul 2. Varianta 57	7
1. Subiectul I.	7
2. Subiectul II.	7
3. Subiectul III.	8
Capitolul 3. Varianta 58	11
1. Subiectul I.	11
2. Subiectul II.	11
3. Subiectul III.	11
Capitolul 4. Varianta 59	15
1. Subiectul I.	15
2. Subiectul II.	15
3. Subiectul III.	16
Capitolul 5. Varianta 60	19
1. Subiectul I.	19
2. Subiectul II.	19
3. Subiectul III.	20

CAPITOLUL 1

Varianta 56

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $10 : 2 + 1 = 5 + 1 = \boxed{6}$.
2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor $6 = 2 \cdot 3$ şi $9 = 3^2$ este $2 \cdot 3^2 = \boxed{18}$.
3. Împărţind $2x - 5y = 0$ cu y obţinem $2 \cdot \frac{x}{y} - 5 = 0$, de unde $\frac{x}{y} = \boxed{\frac{5}{2} = 2,5}$.
4. Numărul natural mai mic cu 7 decât 2007 este $2007 - 7 = \boxed{2000}$.
5. $2\,\text{ore} = 2 \cdot 60\,\text{minute} = \boxed{120}\,\text{minute}$.
6. Măsura unghiului AOB este $\boxed{180^\circ}$.
7. $A_l = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = \boxed{48\pi}\,\text{cm}^2$.
8. Apotema bazei este egală cu $\frac{8}{2} = 4\,\text{cm}$, iar înălţimea este egală cu $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = \boxed{3}\,\text{cm}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $E(-1) = |-1-1| + |3-(-1)| - 2 = |-2| + |4| - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$.
10. $\boxed{B}$: Singurul dintre numerele date cu exact 3 divizori naturali este 25, care are divizorii naturali $1, 5, 25$. Celelalte numere au toate câte 4 divizori naturali.
11. $\boxed{D}$: Triunghiul isoscel format de diagonala mică a rombului cu două din laturile rombului, având un unghi de 60°, este echilateral. Deci latura rombului are lungimea $2\,\text{cm}$ şi perimetrul rombului este $4 \cdot 2 = 8\,\text{cm}$.
12. $\boxed{A}$: Ştiind lungimea liniei mijlocii MN în triunghi deducem că latura triunghiului este egală cu $2MN = 2 \cdot 3 = 6\,\text{cm}$. Aria triunghiului este $\frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Avem $\frac{a}{b} = \frac{2}{5} = 0,40$, deci a reprezintă $\boxed{40\%}$ din b.

b. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{2}{5} \quad (1) \\ 3a+b & = & 44 \quad (2) \end{cases}$$

Din ecuaţia (1) avem $a = \frac{2}{5}b$ şi înlocuind în ecuaţia (2) obţinem $3\cdot\frac{2}{5}\cdot b+b = 44$ echivalent cu $6b+5b = 220$, de unde $b = \frac{220}{11} = \boxed{20}$ şi $a = \frac{2}{5}\cdot 20 = \boxed{8}$.

14. a. $2(\sqrt{10})^2 - 20 = 2\cdot 10 - 20 = \boxed{0}$.

b.

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 + 2\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}} + \left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= 3-\sqrt{5}+2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}+3+\sqrt{5} \\ &= 6+2\sqrt{9-5} = 6+2\cdot 2 = 6+4 = \boxed{10} \end{aligned}$$

c. Cum $x \geq 0$ (sumă de doi radicali care sunt pozitivi), folosind rezultatul punctului precedent avem $x = \sqrt{10}$. Prin urmare, $\left(\sqrt{10}-x-1\right)^{2007} = \left(\sqrt{10}-\sqrt{10}-1\right)^{2007} = (-1)^{2007} = \boxed{-1}$.

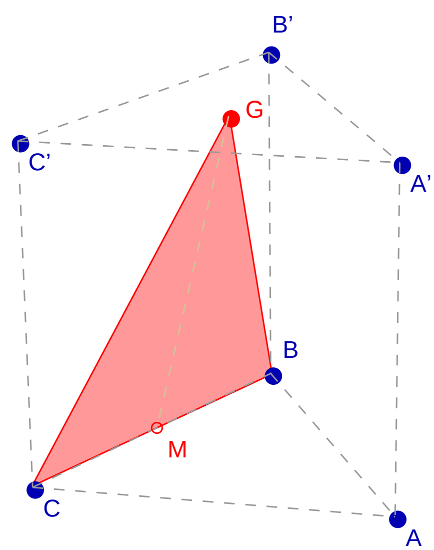

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Ştim că $A_t = A_l + 2A_{ABC}$ ceea ce este echivalent cu $8(6+\sqrt{3}) = 48+2A_{ABC}$ sau $8\sqrt{3} = 2A_{ABC}$, de unde $A_{ABC} = 4\sqrt{3}$. Din $A_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2}$ avem: $\dfrac{AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3}$ echivalent cu $\dfrac{AB^2}{4} = 4$ sau $AB^2 = 16$, de unde $AB = 4\,$cm.

c. $V_{ABCA'B'C'} = A_{ABC} \cdot AA'$. Avem deci nevoie de lungimea muchiei laterale a prismei. Din ipoteză $A_l = 48$ ceea ce se rescrie $3A_{ABB'A'} = 48$ sau $3AB \cdot AA' = 48$, de unde $AA' = \dfrac{48}{3 \cdot 4} = 4$. Prin urmare $V_{ABCA'B'C'} = 4\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

d. Ideea este să calculăm volumul tetraedrului $GABC$ în două moduri.
Distanţa de la G la la planul (ABC) este înălţimea prismei, deci volumul tetraedrului $GABC$ privit ca piramidă cu baza ABC şi vârful G este $\dfrac{4\sqrt{3} \cdot 4}{3} = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$.
Determinăm aria triunghiului GBC. Inălţimea triunghiului echilateral $A'B'C'$ este $\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Atunci $GB' = \dfrac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $GB'B$, avem $GB = \sqrt{B'B^2 + B'G^2} = \sqrt{4^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{64}{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Deoarece $GC' = GB'$, rezultă $GC = GB = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Fie M mijlocul segmentului BC. Triunghiul GBC fiind isoscel, $GM \perp BC$. In triunghiul dreptunghic GMB, $GM = \sqrt{GB^2 - MB^2} = \sqrt{\dfrac{64}{3} - 4} = \dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Aria triunghiului GBC este atunci $\dfrac{BC \cdot GM}{2} = \dfrac{4\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$.
Fie d distanţa de la G la planul (ABC). Volumul lui $GABC$ privit ca piramidă cu baza GBC şi vârful A este $\dfrac{d \cdot \mathrm{Aria}_{GBC}}{3}$. Egalând cu valoarea volumului găsită prin prima metodă, avem $\dfrac{d \cdot \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{3}}}{3} = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$. De aici $d = \dfrac{12}{\sqrt{13}} = \boxed{\dfrac{12\sqrt{13}}{13}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 57

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2 \cdot 3 + 4 = \boxed{10}$.
2. Fracţia este $\boxed{\frac{2}{3}}$.
3. Numărul iraţional este $\boxed{b} = \sqrt{2}$.
4. Inecuaţia $2x < 10$ se rescrie $x < \frac{10}{2}$ sau $x < 5$. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei este $\boxed{(-\infty, 5)}$.
5. Latura pătratului este $\sqrt{36} = \boxed{6}\,\text{cm}$.
6. Perimetrul rombului este $4 \cdot 12 = \boxed{48}\,\text{cm}$.
7. $V_{cilindru} = A_{bazei} \cdot h \overset{h=g}{=} 5\pi \cdot 5 = \boxed{25\pi}\,\text{cm}^3$.
8. $A_t = A_l + A_{bazei} = 4 \cdot A_{\text{feţei laterale}} + A_{bazei} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 10}{2} + 5^2 = 100 + 25 = \boxed{125}\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Aproximarea lui $\sqrt{10}$ prin lipsă cu o zecime este $\boxed{3,1}$.
10. $\boxed{A}$: Media clasei la test este:

$$\frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{2 + 3 + 1 + 8 + 1 + 3 + 2}$$
$$= \frac{8 + 15 + 6 + 56 + 8 + 27 + 20}{20} = \frac{140}{20} = 7$$

11. $\boxed{B}$: Din asemănarea triunghiurilor ABC şi DEF avem: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Înlocuind lungimile laturilor date în ipoteză obţinem: $\frac{8}{24} = \frac{6}{EF}$, de unde $EF = \frac{24 \cdot 6}{8} = \frac{144}{8} = 18$ cm.
12. $\boxed{D}$: Aria cercului din care provine sectorul de cerc este egală cu $\pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi\,\text{cm}^2$. Sectorul de cerc corespunzător unghiul la centru cu măsura

30° reprezintă a douăsprezecea parte din cerc, deci aria sectorului de cerc este $\frac{1}{12} \cdot 36\pi = 3\pi\,\mathrm{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie n numărul elevilor din şcoală, A mulţimea elevilor care participă la cercul de matematică şi B mulţimea elevilor care participă la cercul de informatică. Folosind faptul că $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (unde $|A|$ reprezintă numărul elementelor mulţimii A), avem: $n = \frac{70}{100} \cdot n + \frac{45}{100} \cdot n - 42$ echivalent cu $n = \frac{115}{100} n - 42$, sau $42 = \left(\frac{115}{100} - 1\right) n$, de unde $n = \frac{42 \cdot 100}{15} = \boxed{280}$.

    b. La cercul de matematică participă $\frac{70}{100} \cdot 280 = 196$ elevi. Pentru a afla numărul elevilor care participă **numai** la cercul de matematică, din numărul elevilor care participă la cercul de matematică scădem numărul elevilor care participă la ambele cercuri, adică $196 - 42 = \boxed{154}$ elevi.

14. a. $(5n + 2)(n - 1) = 5n^2 - 5n + 2n - 2 = 5n^2 - 3n - 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

    b. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$, avem

$$
\begin{aligned}
&\frac{4 - 25n^2}{5n^2 - 3n - 2} : \frac{4 - 10n}{n - 1} + \frac{11n + 4}{10n + 4} \\
\overset{(a)}{=}\ & \frac{(2 - 5n)(2 + 5n)}{(5n + 2)(n - 1)} \cdot \frac{n - 1}{2(2 - 5n)} + \frac{11n + 4}{2(5n + 2)} \\
=\ & \frac{1}{2} + \frac{11n + 4}{2(5n + 2)} = \frac{5n + 2 + 11n + 4}{2(5n + 2)} \\
=\ & \frac{16n + 6}{2(5n + 2)} = \frac{8n + 3}{5n + 2}
\end{aligned}
$$

    c. Fie d un divizor natural comun al lui $8n+3$ şi $5n+2$. Atunci cum d divide şi $8(5n+2) - 5(8n+3) = 1$, rezultă $d = 1$. Deci $\frac{8n + 3}{5n + 2}$ este fracţie ireductibilă.

15. a.

    b. $A_l = 6A_{ABB'A'} = 6 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \boxed{54\sqrt{3}}$.

    c. Din $AB \| ED \| E'D'$ şi $AB = E'D'$ rezultă că $ABD'E'$ este paralelogram, deci $AE' \| BD'$. Cum $AE' \| BD'$ şi $BD' \subset (DBB')$ rezultă că $AE' \| (DBB')$.

    d. Fie M mijlocul lui AE'. Demonstrăm că distanţa de la S la AE' este distanţa MS. Intr-adevăr, S fiind mijlocul lui EB' este de asemenea mijlocul segmentelor $E'B$. Prin urmare, MS este linie mijlocie în triunghiul $AE'B$, deci $MS \| AB$. Cum $AB \perp (AA'E'E)$, rezultă că $MS \perp (AA'E'E)$, sau $MS \perp AE'$. In plus $MS = \frac{AB}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

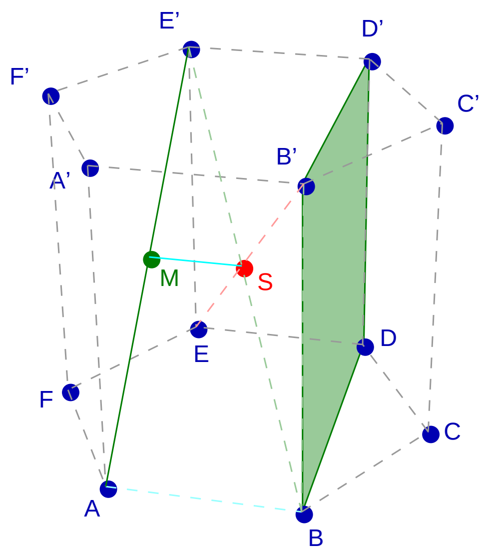

FIGURA 1. Exercițiul 15.

CAPITOLUL 3

Varianta 58

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $0,75 + \dfrac{1}{4} = 0,75 + 0,25 = \boxed{1}$.
2. Mai mare este numărul $\boxed{a = 1,(2)}$.
3. Un număr natural este divizibil cu 3 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3. In cazul de faţă, numărul divizibil cu 3 este $\boxed{582}$ (suma cifrelor sale este $5 + 8 + 2 = 12$).
4. $x = \dfrac{3 \cdot 7}{6} = \boxed{\dfrac{7}{2}}$.
5. Ştim că linia mijlocie în trapez este semisuma lungimilor bazelor, deci suma lungimilor bazelor este $2 \cdot 10 = \boxed{20}$ cm.
6. Aria pătratului de latură 4 cm este $4^2 = \boxed{16}\,\text{cm}^2$.
7. $A_l = 3 \cdot A_{\text{feţei laterale}} = 3\dfrac{4 \cdot 8}{2} = \boxed{48}\,\text{cm}^2$.
8. $A_{\text{sferă}} = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 12^2 = \boxed{576}\,\pi\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: $3x + 9y + 4 = 3(x + 3y) + 4 \overset{x+3y=5}{=} 3 \cdot 5 + 4 = 19$.
10. $\boxed{D}$: $1\,\text{ar} = 100\,\text{m}^2$, deci $1200\,\text{m}^2 = 12\,\text{ari}$.
11. $\boxed{B}$: Măsura arcului mic AC este $360° - (120° + 80°) = 360° - 200° = 160°$.
12. $\boxed{B}$: Din asemănarea triunghiurilor ABC şi MNP rezultă că $\widehat{PMN} = \widehat{BAC}$. Deci $\widehat{PMN} = 180° - (30° + 90°) = 60°$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie n numărul natural care împărţit la 13 dă restul 7 şi fie $q \in \mathbb{N}$ câtul împărţirii. Conform teoremei împărţirii cu rest avem relaţia: $n = 13q + 7$. Cum vrem ca n să aibă trei cifre, adică $n > 100$ rezultă că $13q + 7 > 100$

sau $q > \frac{93}{13} = 7,1...$. Deci cel mai mic număr natural de trei cifre care împărţit la 13 să dea restul 7 se obţine pentru $q = 8$ şi este $13 \cdot 8 + 7 = \boxed{111}$.

b. Folosind aceleaşi notaţii ca la punctul precedent avem: $100 < 13q + 7 < 1000$ ceea ce este echivalent cu $93 < 13q < 993$ sau $7 < \frac{93}{13} < q < \frac{993}{13} < 77$. Deducem că numerele naturale din trei cifre care la împărţirea cu 13 dau restul 7 sunt: $13 \cdot 8 + 7$; $13 \cdot 9 + 7$; $13 \cdot 10 + 7$;...,$13 \cdot 75 + 7$; $13 \cdot 76 + 7$ sau $111, 124, 137, ..., 982, 995$. Cum de la 8 la 76 sunt $76 - 8 + 1 = 69$ de numere, înseamnă că avem $\boxed{69}$ de numere naturale din trei cifre care împărţite la 13 dau restul 7.

14. a.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x} = \frac{x^2(x+1) - 9(x+1)}{x(x^2-9)} \\ &= \frac{(x+1)(x^2-9)}{x(x^2-9)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

b. Ecuaţia $F(a) = a + 1$ se rescrie $1 + \frac{1}{a} = a + 1$, ceea ce este echivalent cu $\frac{1}{a} = a$, sau $1 = a^2$. De aici $a = \pm 1$ şi cum ambele valori satisfac $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, avem soluţia $\boxed{a \in \{-1, 1\}}$.

c. $S = F(6)+F(12)+F(20)+F(30)+F(42)+F(56) = \left(1 + \frac{1}{6}\right)+\left(1 + \frac{1}{12}\right)+\left(1 + \frac{1}{20}\right)+\left(1 + \frac{1}{30}\right)+\left(1 + \frac{1}{42}\right)+\left(1 + \frac{1}{56}\right) = 6 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} = 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 6 + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{51}{8}}$.

15. a.

b. Notăm cu r lungimea razei bazei mici, R lungimea razei bazei mari, h lungimea înăţimii şi g lungimea generatoarei trunchiului de con. Din ipoteză avem că $\frac{R+r}{2} = 5$ sau $R + r = 10 \quad (1)$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic format de generatoare, raza mare şi paralela la înălţimea trunchiului de con avem: $g^2 = (R-r)^2 + h^2$. Substituind valorile cunoscute, avem $5^2 = (R-r)^2 + 3^2$, sau $R - r = 4$. Adunând aceasta la relaţia (1) deducem $2R = 14$, deci $R = 7$. Nu ni s-a cerut la acest punct, dar vom avea nevoie de $r = 10 - R = 10 - 7 = 3$.

c. $V_{\text{trunchi de con}} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi 3}{3}(7^2 + 3^2 + 7 \cdot 3) = \boxed{79\pi}$.

d. Determinăm aria laterală a conului din care provine trunchiul de con. Pentru aceasta vom afla mai întâi lungimea generatoarei conului. Fie V vârful conului din care provine trunchiul de con. Facem o secţiune axială şi fie AB intersecţia cu cercul bazei mari, iar $A'B'$ intersecţia cu cercul bazei mici. Din asemănarea triunghiurilor $VA'B'$ şi VAB avem:

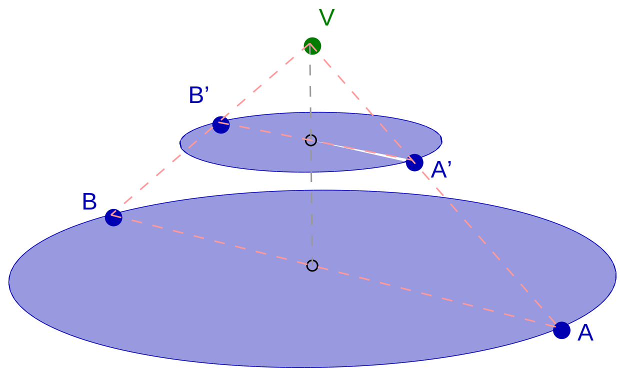

FIGURA 1. Exercițiul 15.

$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB}$. Făcând proporţii derivate obţinem: $\frac{VA - VA'}{VA} = \frac{AB - A'B'}{AB}$ echivalent cu $\frac{AA'}{VA} = \frac{AB - A'B'}{AB}$ sau $\frac{5}{VA} = \frac{14 - 6}{14}$, de unde $VA = \frac{5 \cdot 7}{4} = \frac{35}{4}$. Prin urmare aria laterală a conului este $\pi \cdot R \cdot VA = \pi \cdot 7 \cdot \frac{35}{4}$.
Aria sectorului de cerc care reprezintă desfăşurarea suprafaţei laterale a conului este: $\frac{\pi VA^2 \cdot \theta}{360^\circ}$, unde θ este măsura în grade a unghiului sectorului de cerc. Egalând cele doua arii obţinem: $\pi \cdot 7 \cdot \frac{35}{4} = \frac{\pi \left(\frac{35}{4}\right)^2 \cdot \theta}{360}$, sau $7 = \frac{\frac{35}{4} \cdot \theta}{360^\circ}$, de unde $\theta = \frac{360^\circ \cdot 7 \cdot 4}{35} = \boxed{288}$.

CAPITOLUL 4

Varianta 59

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $24 \cdot 5 = \boxed{120}$.
2. Media aritmetică a numerelor 10, 9, 8 este $\dfrac{10+9+8}{3} = \dfrac{27}{3} = \boxed{9}$.
3. Soluţia ecuaţiei $3x - 4 = 8$ este $x = \dfrac{8+4}{3} = \dfrac{12}{3} = \boxed{4}$.
4. Din $\dfrac{3}{7} = \dfrac{x}{35}$ avem $x = \dfrac{3 \cdot 35}{7} = \boxed{15}$.
5. Aria triunghiul dreptunghic cu lungimile catetelor 12 cm şi 16 cm este $\dfrac{12 \cdot 16}{2} = \boxed{96}\,\mathrm{cm}^2$.
6. Perimetrul paralelogramului cu lungimile laturilor 8 cm şi 4 cm este $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 16 + 8 = \boxed{24}$ cm.
7. Raza sferei este jumătate din diametrul sferei, adică $\dfrac{8}{2} = 4$ cm, de unde avem aria egală cu $4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = \boxed{64}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$.
8. Cum toate muchiile piramidei sunt congruente $A_t = 4A_{\text{feţei}} = 4 \cdot \dfrac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 2 \cdot 36 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{36\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Pentru a găsi coordonatele punctului de intersecţie al graficelor funcţiilor f şi g rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 & (1) \\ y = x + 2 & (2) \end{cases}$$

Înlocuind y din ecuaţia (2) în ecuaţia (1) avem: $x + 2 = -2x + 5$ sau $3x = 3$, de unde $x = 1$, ceea ce dă $y = x + 2 = 1 + 2 = 3$.

10. $\boxed{B}$: Aplicând formula $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avem $E(x) = (2x+3)^2 - (2x-1)^2 = (2x+3-2x+1)(2x+3+2x-1) = 4(4x+2) = 8(2x+1)$.
11. $\boxed{C}$: Mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză. Aflăm lungimea ipotenuzei prin aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul ABC.

Avem deci, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$, de unde $AM = \frac{10}{2} = 5$ cm.

12. $\boxed{D}$: Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic EAB avem: $AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} \stackrel{BE=2AB}{=} \sqrt{4AB^2 - AB^2} = AB\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Pentru a afla toate submulţimile cu 9 elemente ale mulţimii $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ scoatem pe rând câte un element din mulţimea A. Astfel, scoţând 1 obţinem $\{2, 3, 4, ..., 10\}$, scoţând 2 obţinem $\{1, 3, 4, ..., 10\}$, scoţând 3 obţinem $\{1, 2, 4, ..., 10\}$, şamd. Scoţând 10 obţinem $\{1, 2, 3, 4, ..., 9\}$, deci în total avem 10 submulţimi cu câte $\boxed{10}$ elemente.

    b. Submulţimi cu cel mult 2 elemente înseamnă submulţimi cu 0, 1 sau 2 elemente. Mulţimea vidă este singura submulţime cu zero elemente, iar cu un element avem 10 submulţimi: $\{1\}, \{2\}, ..., \{10\}$. Aflăm acum numărul submulţimilor cu 2 elemente. Listăm aceste submulţimi astfel
    - $\{1, 2\}, \{1, 3\}, ..., \{1, 10\}$ în total 9 submulţimi
    - $\{2, 3\}, \{2, 4\}, ..., \{2, 10\}$ în total 8 submulţimi
    - $\ldots$
    - $\{8, 9\}, \{8, 10\}$ în total 2 submulţimi
    - $\{9, 10\}$ în total o submulţime

    Prin urmare numărul submulţimilor lui A cu cel mult 2 elemente este: $1+10+(9+8+...+2+1) = 1+(1+2+3+...+10) = 1+\frac{10 \cdot 11}{2} = 1+55 = \boxed{56}$.

14. a. Înlocuind x cu 1 şi y cu -5 în ecuaţia $x-3y = 16$ obţinem $1-3\cdot(-5) = 16$, sau $16 = 16$, deci perechea $(1, -5)$ este soluţie a ecuaţiei date.

    b. Vezi figura pe pagina următoare.

    c. Avem sistemul:

$$\begin{cases} x - 3y & = & 16 & (1) \\ 3x - y & = & 12 & (2) \end{cases}$$

    Înmulţind ecuţia (2) cu -3 şi adunând la ecuaţia (1) obţinem: $x - 9x = 16 - 36$, de unde $x = \frac{-20}{-8} = \boxed{\frac{5}{2}}$. Înlocuind $x = \frac{5}{2}$ în ecuaţia (2) găsim $y = 3 \cdot \frac{5}{2} - 12 = \frac{15-24}{2} = \boxed{\frac{-9}{2}}$.

15. a. Vezi figura pe pagina următoare.

    b. Fie O proiecţia lui V pe planul bazei. Atunci $V_{con} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot AO^2 \cdot VO}{3}$. Din ipoteză VAB este triunghi echilateral cu latura de lungime $2AO = 16$ cm. Înălţimea VO a conului este înălţime în triunghiul echilateral VAB

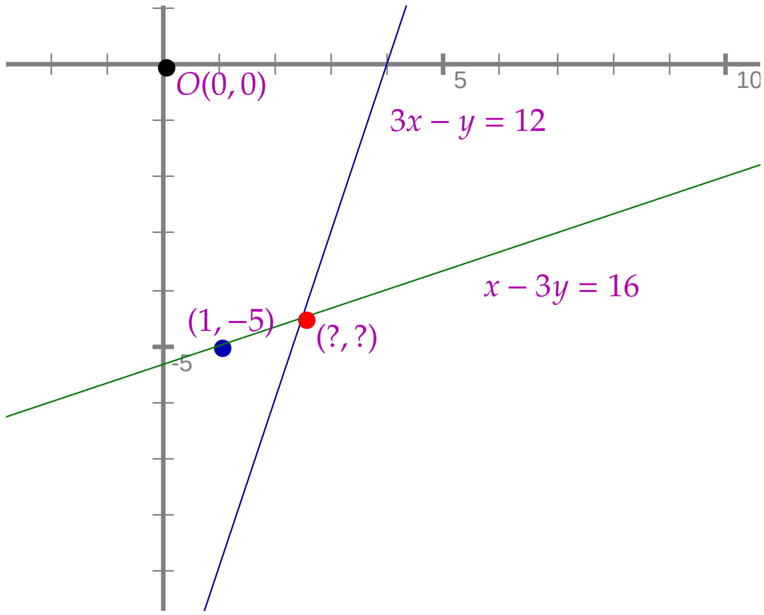

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

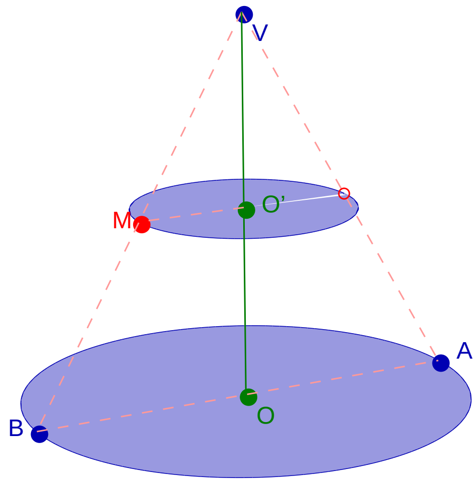

FIGURA 2. Exerciţiul 15(a).

şi deci are lungimea $\frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. Prin urmare $V_{con} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 8\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{512\pi\sqrt{3}}{3}}$.

c. Planul paralel cu planul bazei dus prin M intersectează VO în O'. Cum MO' este linie mijlocie în triunghiul VOB, are lungimea $\frac{OB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm. Aria laterală a trunchiului de con este atunci $A_l = \pi \cdot MB \cdot (O'M + OB) = \pi \cdot 8 \cdot (4 + 8) = \boxed{96\pi}$.

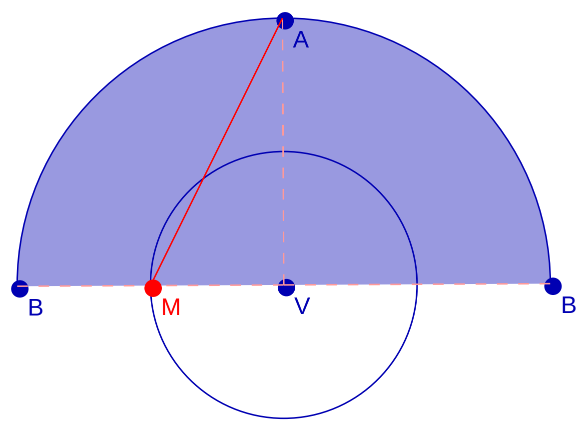

FIGURA 3. Exerciţiul 15(d).

d. **Comentariu:** Indicaţia oficială de pe subiecte2007.edu.ro are rezultatul **greşit** la acest punct! Triunghiul VAM referit acolo este dreptunghic în V, nu în M.
Pentru a desfăşura conul, facem tăietura după VB. Rezultatul nu depinde de modul în care facem tăietura, doar ne simplificăm desenul. Distanţa minimă de la A la M este lungimea segmentului AM.
Obţinem un sector al unui cerc cu centrul in V. Aria acestui sector este aria laterală a conului, adică $\pi \cdot 8 \cdot 16 = 128\pi$. Unghiul la centru al sectorului este $\frac{128\pi}{\pi VA^2} \cdot 360° = 180°$. Unghiul $\widehat{AVM} = \frac{180°}{2}$ este deci drept. Putem folosi atunci teorema lui Pitagora în triunghiul AVM şi avem $AM = \sqrt{VA^2 + VM^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = \boxed{8\sqrt{5}}$.

CAPITOLUL 5

Varianta 60

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $(25-5)+10=20+10=\boxed{30}$.
2. Cel mai mare divizor comun al numerelor $12=2^2\cdot 3$ şi $36=2^2\cdot 3^3$ este $2^2\cdot 3=\boxed{12}$.
3. $\frac{10}{100}\cdot 1400=\boxed{140}$.
4. În total în cutie sunt 15 bile, dintre care 5 roşii. Probabilitatea ca extrăgând o bilă la întâmplare aceasta sa fie roşie este $\frac{5}{15}=\boxed{\frac{1}{3}}$.
5. Aria dreptunghiului este $15\cdot 6=\boxed{90}\,\text{cm}^2$.
6. Perimetrul triunghiului echilateral cu lungimea laturii 12 cm este $3\cdot 12=\boxed{36}$ cm.
7. $A_l=2\pi rg=2\pi\cdot 5\cdot 14=\boxed{140}\,\pi\,\text{cm}^2$.
8. Diagonala paralelipipedului dreptunghic este $\sqrt{2^2+1^2+(\sqrt{11})^2}=\sqrt{4+1+11}=\sqrt{16}=\boxed{4}$ cm.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $\mathbb{N}\cap[-2,1]=\{0,1\}$.
10. $\boxed{C}$: Din $a+b=16$ avem $a=16-b$. Înlocuind în relaţia $3a=5b$ obţinem $3(16-b)=5b$ echivalent cu $48-3b=5b$ sau $8b=48$, de unde $b=\frac{48}{8}=6$. Substituind obţinem şi $a=16-6=10$.
11. $\boxed{A}$: Măsura unghiului ascuţit al trapezului este egală cu $180^\circ-145^\circ=35^\circ$.
12. $\boxed{C}$: $(2\cdot\sin 45^\circ+\cos 45^\circ)\cdot 4=\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 4=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum a, b sunt direct proporţionale cu $4, 5$ avem relaţia $\frac{a}{4} = \frac{b}{5}$ echivalent cu $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ sau $\frac{a}{b} = 0,8$. Deci a este $\boxed{80\%}$ din b.

b. Din ipoteză avem: $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ de unde $a = \frac{4}{7} \cdot c$ şi $b = \frac{5}{7} \cdot c$. Înlocuind în $3a + c = 285$ obţinem $3 \cdot \frac{4}{7} \cdot c + c = 285$, echivalent cu $c\left(\frac{12}{7} + 1\right) = 285$ sau $c\frac{19}{7} = 285$. Avem $c = \frac{285 \cdot 7}{19} = 15 \cdot 7 = \boxed{105}$, $b = \frac{5}{7} \cdot 105 = 5 \cdot 15 = \boxed{75}$ şi $a = \frac{4}{7} \cdot 105 = 4 \cdot 15 = \boxed{60}$.

14. a. $\frac{x}{x^2 - x} = \frac{x}{x(x-1)} = \boxed{\frac{1}{x-1}}$.

b. $2 + x - 2x^2 - x^3 = (2 - 2x^2) + (x - x^3) = 2(1 - x^2) + x(1 - x^2) = (1 - x^2)(2 + x) = (1 - x)(1 + x)(2 + x)$.

c.

$$\begin{aligned}
E(x) &= \left(\frac{x}{x^2 - x} + \frac{x+2}{2 + x - 2x^2 - x^3} + \frac{x^2}{x^2 + x}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) \\
&\overset{(a)}{=} \left(\frac{x}{x(x-1)} + \frac{x+2}{(x+2)(1-x)(1+x)} + \frac{x^2}{x(x+1)}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x} \\
&= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(1-x)(1+x)} + \frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x} \\
&= \frac{x + 1 - 1 + x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{x^2}{x} = x
\end{aligned}$$

15. a.

b. Triunghiurile NPQ, NPR şi RPQ sunt triunghiuri dreptunghice isoscele cu catetele de lungime 10 (latura pătratului), deci sunt triunghiuri congruente. Prin urmare $NQ = NR = QR$ şi $NP = PR = PQ$, de unde rezultă că piramida $PNRQ$ este triunghiulară regulată cu baza triunghiul echilateral NQR şi vârful P.

c. Fie S mijlocul lui TQ. Distanţa cerută este RS. Din $RT \| MQ$, $RT = MQ$ şi $RQ \perp QM$ rezultă că $RTMQ$ este dreptunghi. Deci $TQ = RM$ şi $TS = RS$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic TNQ avem: $TQ = \sqrt{TN^2 + NQ^2} = \sqrt{10^2 + (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{10^2 + 10^2 \cdot 2} = 10\sqrt{3}$.

Avem deci $RS = \frac{10\sqrt{3}}{2} = \boxed{5\sqrt{3}}$.

A doua soluţie S este centrul cubului care are cele două pătrate ca feţe laterale. Distanţa cerută este jumătate din diagonala cubului.

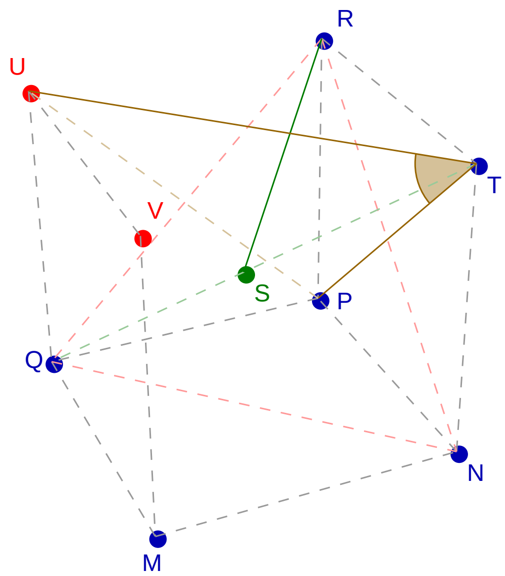

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

d. Construind pătratul $UVMQ$ astfel ca $(UVMQ) \perp (MNPQ)$ obţinem un cub $MNPQUVTRS$. Cum $TU \| NQ$ unghiul dintre TP şi NQ este $\widehat{PTU}$. Triunghiul TPU este echilateral deoarece cele 3 laturi ale sale sunt diagonale ale feţelor cubului, deci măsura $\widehat{PTU}$ este $\boxed{60^\circ}$.