BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 46–50

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 46

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $121 : 11 = \boxed{11}$.
2. Numărul natural scris în baza zece de forma $\overline{17x}$, divizibil cu 10, este egal cu $\boxed{170}$.
3. Din $\frac{a}{6} = \frac{3}{2}$, avem $a = \frac{6 \cdot 3}{2} = \boxed{9}$.
4. Ecuaţia $2x - 1 = 5$ este echivalentă cu $2x = 6$, de unde $x = \frac{6}{2} = \boxed{3}$.
5. Suma unghiurilor ascuţite ale unui triunghi dreptunghic este egală cu $90°$. Cum triunghiul este dreptunghic isocel, unghiurile ascuţite sunt egale şi au măsura egală cu $\frac{90°}{2} = \boxed{45°}$.
6. $L_{cerc} = 2\pi r = 2\pi \cdot 9 = \boxed{18}\pi$ cm.
7. Una dintre cele trei dimensiuni este înălţimea paralelipipedului, iar celelalte două sunt lungimile laturilor dreptunghiului, baza paralelipipedului dreptunghic, deci $V = 4 \cdot 5 \cdot 12 = \boxed{240}\,\mathrm{cm}^3$.
8. $A_{\text{sferă}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = \boxed{400}\pi\, cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Numărul a este egal cu $6+2\sqrt{8} = 6+4\sqrt{2}$. Media aritmetică a numerelor a şi b este egală cu $\frac{a+b}{2} = \frac{6+4\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$.
10. $\boxed{C}$: Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007$ este divizibil cu $2 \cdot 5$, deci cu 10. Prin urmare ultima cifră a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007$ este zero, de unde deducem că ultima cifră a numărului $n = 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 2007$ este 3.
11. $\boxed{D}$: Avem $BC = AC - AB = 18 - 10 = 8\ cm$. Lungimea segmentului MN este egală cu $MB + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} + \frac{8}{2} = 5 + 4 = 9\ cm$.
12. $\boxed{B}$: Unghiurile adiacente sunt unghiurile care au o latură comună, deci măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri adiacente este

egală cu suma măsurilor celor două unghiuri, împărţită la 2, adică $\frac{80^\circ + 120^\circ}{2} = \frac{200^\circ}{2} = 100^\circ$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a, b, respectiv c, suma de bani primită de primul, al doilea, respectiv al treilea frate. Cei trei fraţi au împreună 130 lei, adică $a+b+c = 130 \quad (1)$. Primul frate a cheltuit $\frac{2}{3}\cdot a$ şi rămâne cu $a-\frac{2}{3}a = \frac{a}{3}$, al doilea $\frac{75}{100}\cdot b = \frac{3}{4}\cdot b$ şi rămâne cu $b-\frac{3}{4}b = \frac{b}{4}$, iar al treilea a cheltuit $\frac{40}{100}\cdot c = \frac{2c}{5}$ şi rămâne cu $c-\frac{2}{5}c = \frac{3}{5}c$. Conform ipotezei, sumele de bani rămase fraţilor sunt egale, de unde relaţia $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{3c}{5}$. Din $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ avem $b = \frac{4a}{3}$, iar din $\frac{a}{3} = \frac{3c}{5}$, avem $c = \frac{5a}{3\cdot 3} = \frac{5a}{9}$. Înlocuind în relaţia (1) obţinem: $a + \frac{4a}{3} + \frac{5a}{9} = 130$, ceea ce este echivalent cu $9a + 12a + 5a = 1170$ sau $26a = 1170$, de unde $a = \frac{1170}{26} = \boxed{45}$. Substituind obţinem $b = \frac{4a}{3} = \frac{4\cdot 45}{3} = \boxed{60}$ şi $c = \frac{5a}{9} = \frac{5\cdot 45}{9} = \boxed{25}$.

b. Primul frate a cheltuit $\frac{2}{3}\cdot 45 = \boxed{30}$, al doilea $\frac{3}{4}\cdot 60 = \boxed{45}$, iar al treilea $\frac{2}{5}\cdot 25 = \boxed{10}$.

14. a. Intr-adevăr

$$\begin{aligned} E(x) &= (x+1)^2 + 2\cdot(x-7) + 1 \\ &= x^2 + 2x + 1 + 2x - 14 + 1 = x^2 + 4x - 12 \\ &= (x^2 - 4) + (4x - 8) = (x-2)(x+2) + 4(x-2) \\ &= (x-2)(x+2+4) = (x-2)(x+6) \end{aligned}$$

b. $E(-1) = (-1-2)(-1+6) = -3\cdot 5 = \boxed{-15}$.

c. $E(x)+16 = (x-2)(x+6)+16 = x^2+4x-12+16 = x^2+4x+4 = (x+2)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

15. a.

b. Din $AA' \perp (ABC)$ rezultă că triunghiul $A'AC$ este dreptunghic şi cum $m(\widehat{A'CA}) = 45^\circ$ rezultă că triunghiul $A'AC$ este dreptunghic isocel, deci $AA' = AC$. Triunghiul ABC este triunghi isocel ($AB = AC$) cu $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$(măsura unghiurilor hexagonului regulat), de unde deducem că $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = 30^\circ$. Fie P piciorul perpendicularei din B pe AC. În triunghiul dreptunghic APB avem $\cos\widehat{BAP} = \frac{AP}{AB}$ ceea ce este echivalent

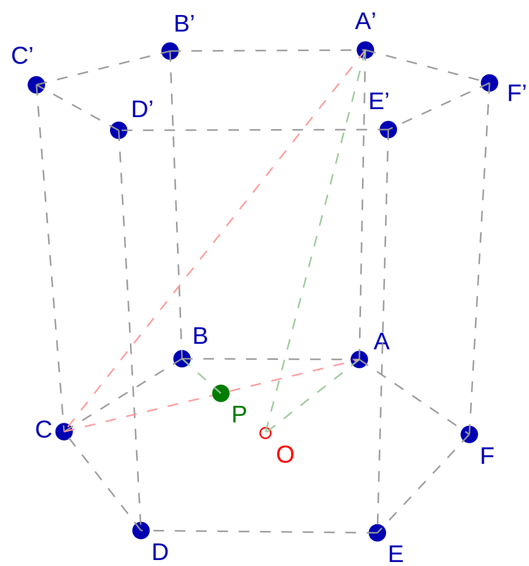

FIGURA 1. Exercițiul 15.

cu $\cos 30^\circ = \dfrac{AP}{AB}$, de unde $AP = AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, iar $AC = 2AP = AB\sqrt{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $A'AO$ avem $A'O^2 = AA'^2 + AO^2$, echivalent cu $(6\sqrt{3})^2 = (AB\sqrt{3})^2 + AB^2$ (în hexagonul regulat $AO = AB$) sau $36 \cdot 3 = 4AB^2$, de unde simplificând prin 4, obținem $27 = AB^2$, sau $AB = 3\sqrt{3}\ cm$.

c. Avem $A_t = 6 \cdot A_{ABB'A'} + 2 \cdot A_{ABCDEF}$. Pe de o parte $A_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = 3\sqrt{3} \cdot 9 = 27\sqrt{3}\ cm^2$, iar pe de altă parte $A_{ABCDEF} = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \dfrac{AO \cdot OB \cdot \sin 60^\circ}{2} = 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{81\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare, $A_t = 6 \cdot 27\sqrt{3} + 2 \cdot \dfrac{81\sqrt{3}}{2} = 162\sqrt{3} + 81\sqrt{3} = \boxed{243\sqrt{3}}\ cm^2$

d. Din $CC' \perp (ABCDEFG)$ și $PB \subset (ABCDEF)$ rezultă că $CC' \perp BP$. Cum $BP \perp AC$ și $BP \perp CC'$ avem că $BP \perp (ACC')$ (perpependiculară pe două drepte concurente din plan). Deci distanța de la punctul B la planul (ACC') este distanța BP. În triunghiul dreptunghic APB avem $\sin 30^\circ = \dfrac{BP}{AB}$ echivalent cu $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BP}{3\sqrt{3}}$, de unde $BP = \boxed{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}\ cm$.

CAPITOLUL 2

Varianta 47

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $5 + 10 \cdot 5 = 5 + 50 = \boxed{55}$.
2. $a = 3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$, iar $b = 2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$, deci mai mare este numărul $\boxed{a = 3\sqrt{2}}$.
3. $\frac{25}{100} \cdot 160 = \frac{1}{4} \cdot 160 = \boxed{40}$.
4. $A \setminus B$ conţine elementele care sunt în A şi nu sunt în B, adică $A \setminus B = \boxed{\{8; 9\}}$.
5. $532 = 6 \cdot 88 + 4$, deci restul împărţirii lui 532 la 6 este $\boxed{4}$.
6. $1\ dm^3 = 1\ litru$, deci $3\ dm^3 = \boxed{3}\ litri$.
7. $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = \boxed{36}\pi\ cm^3$.
8. $A_t = 6 \cdot 10^2 = \boxed{600}\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $\left(-\frac{x^2}{y^4}\right) : \left(-\frac{x^4}{y^2}\right) = \left(-\frac{x^2}{y^4}\right) \cdot \left(-\frac{y^2}{x^4}\right) = \frac{1}{x^2y^2}$.
10. $\boxed{D}$: Ecuaţia $3(x-1) = x^2 - 1$ se rescrie $3(x-1) - (x^2-1) = 0$ sau $3(x-1) - (x-1)(x+1) = 0$, iar după ce dăm factor comun avem $(x-1)(3-x-1) = 0$ sau $(x-1)(2-x) = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $2 - x = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt deci $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$.
11. $\boxed{B}$: Aplicând teorema lui Pitagora, găsim lungimea ipotenuzei egală cu $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$. Aria triunghiului dreptunghic este pe de o parte egală cu produsul catetelor supra doi, iar pe de alta ipotenuza ori înălţimea corespunzătoare ipotenuzei supra doi, adică $\frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{10 \cdot h}{2}$ sau $48 = 10 \cdot h$, de unde $h = \frac{48}{10} = 245 = 4,8\ cm$.

12. $\boxed{C}$: Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului dreptunghic ABC. Conform teoremei lui Pitagora avem $a^2 = b^2 + c^2$. Atunci

$$(\sin \hat{B})^2 + (\cos \hat{B})^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. De la ora 9 la ora $14 : 30$, cei doi muncitori au lucrat 5 ore şi 30 de minute. Prin urmare, 4 muncitori o vor finaliza în jumătate din timpul în care au finalizat-o 2 muncitori, adică în 2 ore şi 45 de minute. Cum cei 4 muncitori încep să lucreze la ora 8, vor termina lucrarea la ora $\boxed{10 : 45}$.
    b. Dacă 2 muncitori au nevoie de $5 : 30$ ore să termine lucrarea, un singur muncitor o va termina într-un timp dublu, adică în $\boxed{11}$ ore.
14. a. Ecuaţia $f(x) = g(x)$ revine la $0,5x-2 = -2x+3$ ceea ce este echivalent cu $\frac{1}{2}x-2 = -2x+3$. Aducând la acelaşi numitor obţinem ecuaţia echivalentă $x - 4 = -4x + 6$, sau $5x = 10$, de unde $x = \frac{10}{5} = \boxed{2}$.

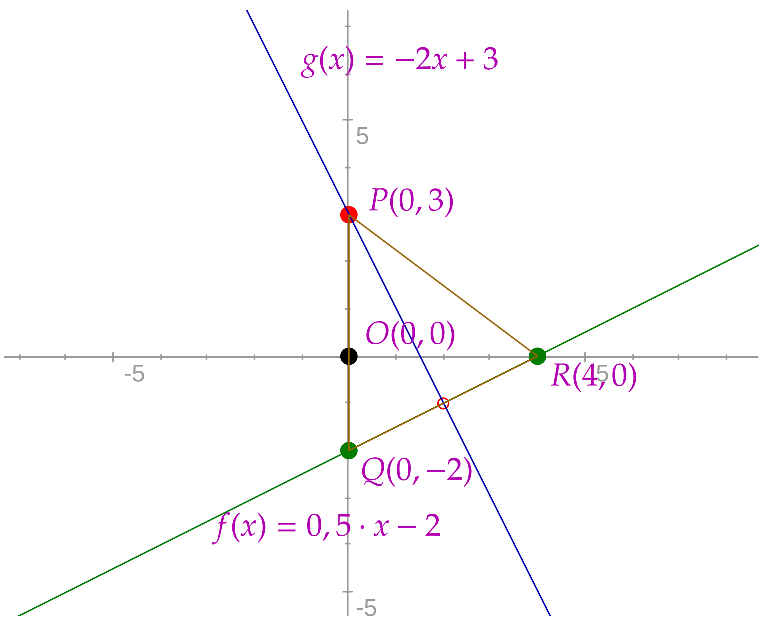

Figura 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Intersecţia graficului funcţiei g cu axa Oy este punctul $P(0, y)$, unde $y = g(0) = 3$, adică punctul $P(0, 3)$. Determinăm şi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei f cu axele de coordonate. Pentru intersecţia cu

Oy luăm $x = 0$ şi găsim $y = f(0) = -2$, de unde avem punctul $Q(0, -2)$. Pentru intersecţia cu Ox, punem $y = 0$ ceea ce revine la $0,5x - 2 = 0$, sau $0,5x = 2$, de unde $x = \frac{2}{0,5} = 4$ şi avem deci punctul $R(4, 0)$. Notăm cu d distanţa de la P la dreapta ce reprezintă graficul funcţiei f. Avem $\text{Aria}_{PQR} = \frac{RQ \cdot d}{2} = \frac{PQ \cdot RO}{2}$, ceea ce este echivalent cu $RQ \cdot d = PQ \cdot RO \quad (1)$. În triunghiul dreptunghic ROQ aplicând teorema lui Pitagora avem $RQ = \sqrt{RO^2 + OQ^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Înlocuind în (1) avem: $2\sqrt{5} \cdot d = 5 \cdot 4$, de unde $d = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = \boxed{2\sqrt{5}}$.

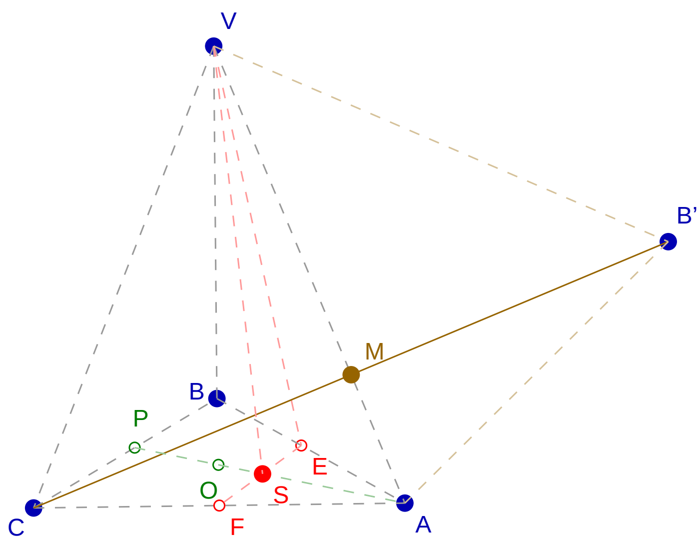

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

15. a.
   b. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi fie $AO \cap BC = \{P\}$. Raza cercului circumscris este $AO = 4\sqrt{3}$. Centrul cercului circumscris unui triunghi se găseşte la intersecţia mediatoarelor triunghiului şi cum într-un triunghi echilateral punctele de intersecţie ale mediatoarelor, medianelor şi bisectoarelor coincid, O este şi centrul de greutate al triunghiului ABC. Centrul de greutate al unui triunghi se găseşte la $\frac{2}{3}$ de vârful triunghiului, deci $AO = \frac{2}{3}AP$, de unde $AP = \frac{3AO}{2} = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

În triunghiul dreptunghic APB avem $\sin\widehat{ABP} = \frac{AP}{AB}$ ceea ce revine la $\sin 60^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{AB}$ sau $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{AB}$, de unde $AB = \frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$.

c. Fie $EF \| BC$, cu $F \in AC$. Unghiul dintre BC şi VE este acelaşi cu unghiul format de EF cu VE, adică unghiul $\widehat{VEF}$. Cum E este mijlocul lui AB şi $EF \| BC$ rezultă că F este mijlocul lui AC. Deci EF este linie mijlocie în triunghiul ABC şi are lungimea egală cu $\frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6$. Fie S proiecţia lui V pe EF. În triunghiul dreptunghic VSE avem $\sin\widehat{VES} = \frac{VS}{VE}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VEA, avem $VE = \sqrt{VA^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$. Cum triunghiul VEF este isocel ($VF = VE$) şi VS este înălţime, atunci VS este şi mediană, de unde avem că S este mijlocul lui EF, iar $ES = \frac{EF}{2} = \frac{6}{2} = 3$. În triunghiul dreptunghic VSE aplicând teorema lui Pitagora avem $VS = \sqrt{VE^2 - EP^2} = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{64-9} = \sqrt{55}$. Prin urmare, $\sin\widehat{VES} = \frac{VS}{VE} = \boxed{\frac{\sqrt{55}}{8}}$.

d. Triunghiurile AMB şi AMC sunt congruente conform cazului de congruenţă latură-unghi-latură ($AB = AC$, AM latură comună şi $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$), de unde avem că $MB = MC$. Perimetrul triunghiului MBC este minim, când $MB = MC$ este minimă. Cum cea mai scurtă distanţa de la un punct la o dreaptă este perpendiculara de la acel punct pe dreaptă, MB este minimă când $MB \perp VA$ şi MC este minimă când $MC \perp VA$. Trebuie să observăm că din congruenţa triunghiurilor AMB şi AMC rezultă că este suficient ca $MB \perp VA$ pentru a avea şi $MC \perp VA$. Calculăm MB prin calcularea ariei triunghiului VAB în două moduri: $A_{VAB} = \frac{VE\cdot AB}{2} = \frac{BM\cdot VA}{2}$. De aici $BM = \frac{VE\cdot AB}{VA} = \frac{8\cdot 12}{10} = \frac{48}{5}$. Deci perimetrul minim al triunghiul MBC este $2\cdot\frac{48}{5} + 12 = 2\cdot 9{,}6 + 12 = 19{,}2 + 12 = \boxed{31{,}2}\ cm$.

Observaţie. Putem folosi şi metoda standard, desfăşurând faţa VAB în planul feţei VAC, printr-o rotaţie în jurul muchiei VA. Atunci B' este simetricul punctului C faţă de VA. iar M este intersecţia dreptelor VA respectiv $B'C$, deci piciorul perpendicularei din C pe VA.

CAPITOLUL 3

Varianta 48

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = \boxed{9}$
2. Numărul de două ori mai mic decât $3,24$ este egal cu $\frac{3,24}{2} = \boxed{1,62}$.
3. Numerele mai mici decât 10 divizibile cu 3 sunt 3, 6 şi 9, deci în total 3 numere din cele 9 numere mai mici decât 10 sunt divizibile cu 3. Probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr natural diferit de zero, mai mic decât 10, acesta să se dividă cu 3 este $\frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$.
4. $\sqrt{18} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}}$
5. Diagonala pătratului cu latura de lungime 4 cm este egală cu $\sqrt{4^2 + 4^2} = \boxed{4\sqrt{2}}$.
6. $A_{romb} = \frac{\text{diagonala}_1 \cdot \text{diagonala}_2}{2} = \frac{3 \cdot 16}{2} = \boxed{24}\ cm^2$.
7. $A_l = 3 \cdot A_{\text{feţei laterale}} = 3 \cdot 6 \cdot 5 = \boxed{90}\ cm^2$.
8. $V_{cilindru} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 8\pi \cdot 36 = \boxed{288}\pi\ \text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: $a = -\frac{75}{100} = -\frac{3}{4} = -\frac{18}{24}$, $b = -\frac{5}{6} = -\frac{20}{24}$ şi $c = -\frac{21}{24}$. Avem $-\frac{21}{24} < -\frac{20}{24} < -\frac{18}{24}$ sau $c < b < a$.
10. $\boxed{B}$: $f(\sqrt{3} - 1) = 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) - 2(\sqrt{3} - 1) = 0$
11. $\boxed{A}$: Numerele 5, 12 şi 13 sunt numere Pitagorice, adică $5^2 + 12^2 = 13^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora deducem că triunghiul este dreptunghic, iar aria lui este egală cu jumătate din produsul catetelor, adică $\frac{5 \cdot 12}{2} = 30\ \text{cm}^2$.

12. $\boxed{A}$: Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC avem $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ cm. Deci, $\sin\hat{B} + \tan\hat{B} = \frac{AC}{BC} + \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} + \frac{8}{6} = \frac{4}{5} + \frac{4}{3} = \frac{12+20}{15} = \frac{32}{15}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a, b, c cantitătile de grâu din primul, al doilea şi respectiv al treilea depozit. Faptul că în cele trei depozite se află 600 de tone de grâu se transcrie în relaţia $a + b + c = 600$. Din primul depozit se transferă 20 de tone de grâu în al doilea depozit, asta înseamnă că în primul depozit rămân $a - 20$, iar în al doilea avem $b + 20$ tone de grâu. Tot din primul depozit se transferă 25 de tone de grâu de data aceasta în al treilea depozit, deci în primul rămân $(a - 20) - 25 = a - 45$ tone de grâu, iar în al treilea depozit avem $c + 25$. După transfer în cele trei depozite avem cantităţi egale de grâu, adică $a - 45 = b + 20 = c + 25$. Din $b + 20 = c + 25$, avem $b - c = 25 - 20 = 5$, deci în al doilea depozit se află cu $\boxed{5}$ tone de grâu mai mult decât în al treilea depozit.

b. Folosim relaţiile găsite la punctul (a) şi anume $a + b + c = 600 \quad (1)$ şi $a - 45 = b + 20 = c + 25$. Din $a - 45 = b + 20$, deducem $b = a - 65$, iar din $a - 45 = c + 25$ avem $c = a - 70$. Înlocuind în (1) obţinem: $a + a - 65 + a - 70 = 600$, ceea ce este echivalent cu $3a = 600 + 65 + 70$, sau $3a = 735$. De aici $a = \frac{735}{3} = \boxed{245}$, ceea ce conduce la $b = 245 - 65 = \boxed{180}$ şi $c = 245 - 70 = \boxed{175}$.

14. a.

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2}\right) : \frac{x^2+4}{x^2-x-2} \\ &= \frac{2(x+2) + x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x^2-1) - (x+1)}{x^2+4} \\ &= \frac{2x + 4 + x^2 - 2x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)(x-1-1)}{x^2+4} \\ &= \frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+4} = \frac{x+1}{x+2} \end{aligned}$$

b. Continuând punctul precedent, $E(a) = \frac{a+1}{a+2} = 1 - \frac{1}{a+2}$, $\forall a \in \mathbb{Z} - \{-2, -1, 2\}$. Atunci $E(a) \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $\frac{1}{a+2} \in \mathbb{Z}$, ceea ce este echivalent cu $a + 2$ divide 1 sau $a + 2 \in \{-1, 1\}$. Din $a + 2 = 1$ obţinem $a = -1$, valoare care nu convine, deoarece $a \in \mathbb{Z} - \{-2, -1, 2\}$, iar din $a + 2 = -1$, avem $\boxed{a = -3} \in \mathbb{Z} - \{-2, -1, 2\}$.

c. $2E(x) + E(0) = 3$ este echivalentă cu $2 \cdot \frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{2} = 3$. Aducem la acelaşi numitor şi obţinem $4(x+1) + x + 2 = 6(x+2)$, ceea ce este echivalent cu $4x + 4 + x + 2 = 6x + 12$, sau $4x + x - 6x = 12 - 2 - 4$. De aici, $-x = 6$ şi găsim $\boxed{x = -6}$.

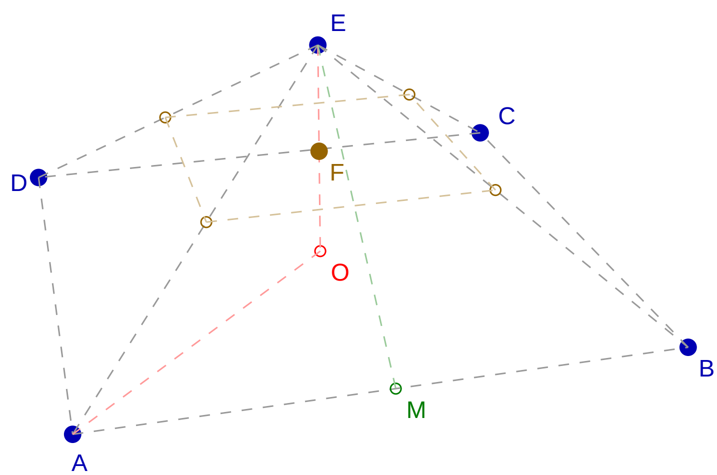

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Din $AE = EC$ rezultă că triunghiul AEC este isocel şi deci $\widehat{EAC} = \widehat{ECA}$. Cum $m(\widehat{AEC}) = 120°$ avem $m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{ECA}) = \frac{180° - m(\widehat{AEC})}{2} = \frac{180 - 120°}{2} = 30°$. În triunghiul dreptunghic AOE avem $\sin \widehat{OAE} = \frac{EO}{AE}$, echivalent cu $\sin 30° = \frac{EO}{4}$, de unde $EO = 4 \cdot \sin 30° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\ cm$.

c. Avem $A_t = A_{ABCD} + 3 \cdot A_{AEB}$.
Pentru aria lui $ABCD$ avem nevoie de latura pătratului. În triunghiul dreptunghic AOE aplicând teorema lui Pitagora avem $AO = \sqrt{AE^2 - EO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Prin urmare, diagonala AC a pătratului $ABCD$ este egală cu $AC = 2AO = 4\sqrt{3}$, iar $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$. Avem deci $A_{ABCD} = (2\sqrt{6})^2 = 4 \cdot 6 = 24$.
Fie M piciorul perpendicularei din E pe AB. Cum triunghiul AEB este isocel, înălţimea este şi mediană, deci M este mijlocul lui AB. În triunghiul dreptunghic AME aplicând teorema lui Pitagora $EM = \sqrt{AE^2 - AF^2} =$

$\sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{16-6} = \sqrt{10}$. Atunci $A_{AEB} = \dfrac{AB \cdot EM}{2} = \dfrac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}}{2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

În final, $A_t = 24 + 4 \cdot 2\sqrt{15} = 24 + 8\sqrt{15} = \boxed{8(3+\sqrt{15})}\ cm^2$.

d. Fie $(PQRS)$ planul paralel cu planul bazei $(ABCD)$. Avem $\dfrac{V_{EPQRS}}{V_{ABCDE}} = \left(\dfrac{PQ}{AB}\right)^3$. Cum $PQ \| AB$ rezultă că triunghiul EPQ este asemenea cu triunghiul EAB, de unde rezultă că $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{EP}{EA}$. Din $PF \| AO$ rezultă că triunghiul EFP este asemenea cu triunghiul EOA, de unde avem că $\dfrac{EF}{EO} = \dfrac{EP}{EA}$. Din $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{EP}{EA}$ şi $\dfrac{EF}{EO} = \dfrac{EP}{EA}$, deducem că $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{EF}{EO}$. Prin urmare, $\dfrac{V_{EPQRS}}{V_{ABCDE}} = \left(\dfrac{EF}{EO}\right)^3 \quad (1)$. Din ipoteză avem $V_{EPQRS} = 2$, iar $V_{ABCDE} = \dfrac{EO \cdot A_{ABCD}}{3} = \dfrac{2 \cdot 24}{3} = 16$. Relaţia (1) revine la $\dfrac{2}{16} = \left(\dfrac{EF}{2}\right)^3$ echivalent cu $\dfrac{1}{8} = \dfrac{EF^3}{8}$, de unde $EF^3 = 1$ sau $\boxed{EF = 1}\ cm$.

CAPITOLUL 4

Varianta 49

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $9 \cdot 7 = \boxed{63}$
2. O zi are $\boxed{24}$ de ore.
3. Porţiunea haşuratăreprezintă $\boxed{\frac{5}{6}}$ din întreg.
4. $2a - 3b = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 10 + 6 = \boxed{16}$.
5. Raza cercului este jumătate din diametru, adică $\frac{12}{2} = \boxed{6}$ cm.
6. Perimetrul dreptunghiului cu lungimile laturilor $2\ cm$ şi $6\ cm$ este egal cu $2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 4 + 12 = \boxed{16}$.
7. $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} = 4\pi \cdot 3^2 = \boxed{36}\pi\,\text{cm}^3$.
8. $A_t = 6 \cdot A_{\text{feţe}} = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = \boxed{150}\ cm^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Din $\frac{x-1}{4} = \frac{3}{2}$ avem $x - 1 = \frac{3 \cdot 4}{2}$, echivalent cu $x - 1 = 6$, de unde $x = 7$.
10. $\boxed{C}$: Cum $A(m, m+1)$ aparţine graficului funcţiei f, avem $f(m) = m + 11$ ceea ce este echivalent cu $3m - 1 = m + 11$, sau $3m - m = 1 + 11$, sau $2m = 12$, de unde $m = \frac{12}{2} = 6$.
11. $\boxed{A}$: Conform teoremei înălţimii, ▼[detalii]
    într-un triunghiu dreptunghic, înălţimea dusă din unghiul drept este medie proporţională între segmentele determinate de ea pe ipoteză
    avem $AD^2 = BD \cdot DC$. Deci $AD = \sqrt{10 \cdot 40} = \sqrt{400} = 20$. Prin urmare $A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{20 \cdot 50}{2} = 500\,\text{cm}^2$
12. $\boxed{B}$: Fie DE distanţa de la D la AB. Avem $A_{ABCD} = AB \cdot DE$, de unde $DE = \frac{A_{ABCD}}{AB} = \frac{56}{7} = 8\,\text{cm}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Puterile lui 3 sunt numere impare. Cum $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{2004} + 3^{2005} + 3^{2006} + 3^{2007}$ este sumă a primelor 2008 puteri ale lui 3, A este deci suma a 2008 numere impare, deci este număr par (suma a unui număr par de numere impare este număr par).

b. Scriind numărul dat sub forma

$$\begin{aligned} A &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2004} + 3^{2005} + 3^{2006} + 3^{2007} \\ &= (3^0 + 3^2) + (3^1 + 3^3) + \ldots + (3^{2004} + 3^{2006}) + (3^{2005} + 3^{2007}) \\ &= (3^0 + 3^2) + 3(3^0 + 3^2) + \ldots + 3^{2004}(3^0 + 3^2) + 3^{2005}(3^0 + 3^2) \\ &= 10 + 3 \cdot 10 + \ldots + 3^{2004} \cdot 10 + 3^{2005} \cdot 10 \\ &= 10(1 + 3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{2004} + 3^{2005}) \end{aligned}$$

se observă că este divizibil cu 10.

14. a.

$$\begin{aligned} E(x) &= \left(\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{6}{x^2-4}\right) : \left(\frac{x^2+4}{x^2-4} + 1\right) \\ &= \frac{5(x+2) + 2(x-2) - 6}{(x-2)(x+2)} : \frac{x^2+4+x^2-4}{x^2-4} \\ &= \frac{5x+10+2x-4-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x^2-4}{2x^2} \\ &= \frac{7x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2} = \frac{7}{2x} \end{aligned}$$

b. Simplificăm mai întâi expresia lui $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{2}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \dfrac{2}{5-1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Atunci $E(x) = E\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \boxed{7}$.

c. Ecuaţia $E(a) = \dfrac{1}{2} \cdot a + 3$ revine la $\dfrac{7}{2a} = \dfrac{1}{2} \cdot a + 3$, ceea ce este echivalent cu $7 = a^2 + 6a$, sau $a^2 + 6a - 7 = 0$. Aranjăm ecuaţia $(a^2 - 1) + 6(a - 1) = 0$, sau $(a-1)(a+1) + 6(a-1) = 0$. Dând factor comun $a - 1$ obţinem $(a-1)(a+1+6) = 0$, sau $(a-1)(a+7) = 0$, de unde $a - 1 = 0$ sau $a + 7 = 0$. Prin urmare soluţiile sunt $a_1 = \boxed{1}$ şi $a_2 = \boxed{-7}$.

15. a.

b. Fie O intersecţia diagonalelor bazei $ABCD$ iar O' intersecţia diagonalelor lui $A'B'C''D'$. Atunci OO' este înălţimea trunchiului de piramidă. Fie M proiecţia lui O pe AB, iar M' proiecţia lui O' pe $A'B'$. Construim $M'P \perp MO$ unde $P \in MO$. Avem $M'P = OO'$ (distanţa dintre două drepte paralele). În triunghiul dreptunghic $M'PM$ aplicând teorema lui Pitagora

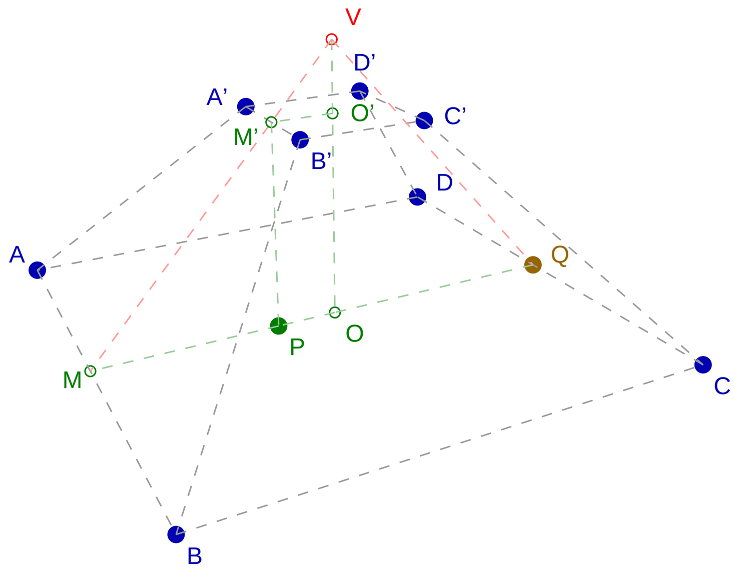

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

avem: $M'P = \sqrt{MM'^2 - MP^2}$. Cum $MP = MO - M'O' = \frac{AB}{2} - \frac{A'B'}{2} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6\ cm$, avem $M'P = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\ cm$.

c. Fie $VABCD$ piramida din care provine trunchiul de piramidă. Din $M'O' \| MO$ rezultă că triunghiurile $VO'M'$ şi VOM sunt asemenea, deci $\frac{VO'}{VO} = \frac{M'O'}{MO}$. Făcând proporţii derivate avem $\frac{VO'}{VO - VO'} = \frac{M'O'}{MO - M'O'}$ ceea ce este echivalent cu $\frac{VO'}{OO'} = \frac{2}{8-2}$ sau $\frac{VO'}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{6}$, de unde $VO' = \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{6} = \sqrt{5}\ cm$, iar $VO = VO' + O'O = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}\ cm$. Deci $V_{VABCD} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{256 \cdot 4\sqrt{5}}{3} = \boxed{\frac{1024\sqrt{5}}{3}}\ cm^3$.

d. Cum planul (ABB') coincide cu (VAB) şi planul (DCC') coincide cu (VDC), unghiul determinat de planele (ABB') şi (DCC') este unghiul determinat de planele (VAB) şi (VDC). Dacă Q este proieţia lui V pe DC, cum piramida este regulată, atunci unghiul dintre planele (VAB) şi (VDC) este unghiul $\widehat{MVQ}$. Avem $VM = VQ$ (apoteme ale feţelor laterale congruente VAB şi VDC), iar VO este înălţime în triunghiul isocel VMQ. Exprimând aria în două moduri, $A_{VMQ} = \frac{VO \cdot MQ}{2} = \frac{VM \cdot VQ \cdot \sin\widehat{MVQ}}{2}$, de unde $VO \cdot MQ = VM \cdot VQ \cdot \sin\widehat{MVQ}$ şi astfel $\sin\widehat{MVQ} = \frac{OO' \cdot MQ}{VM \cdot VQ}$. Din triunghiul dreptunghic VMO, prin aplicarea teoremei lui Pitagora avem $VM = \sqrt{VO^2 + MO^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + 8^2} = \sqrt{16 \cdot 5 + 64} = \sqrt{80 + 64} = \sqrt{144} = 12\ cm$. Deci

$$\sin \widehat{MVQ} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 16}{12 \cdot 12} = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{9}}$$

CAPITOLUL 5

Varianta 50

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $360 : 20 = \boxed{18}$
2. Emisiunea se termină la ora $\boxed{18:00}$.
3. Numărul oilor albe este $\frac{80}{100} \cdot 250 = \boxed{200}$.
4. Un multiplu al numărului 8 este $8 \cdot 1 = \boxed{8}$. Un altul este $8 \cdot 10 = \boxed{80}$.
5. Perimetrul rombului este egal cu $4 \cdot 7 = \boxed{28}\ cm$
6. Ipotenuza triunghiului dreptunghic se află prin aplicarea teoremei lui Pitagora şi este egală cu $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = \boxed{2}\ dm$.
7. $A_l = 6 \cdot A_{\text{feţe laterale}} = 6 \cdot 7^2 = 6 \cdot 49 = \boxed{294}\ cm^2$.
8. $V_{cub} = 3^3 = \boxed{27}\ m^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 11 \leq x \leq 30\} = \{11, 12, 13, ...29, 30\}$, deci mulţimea A are $30 - 10 = 20$ de elemente.
10. $\boxed{D}$: $x^2 - 3x - 10 = 0$ se rescrie $(x^2 - 4) - (3x + 6) = 0$ ceea ce este echivalent cu $(x-2)(x+2) - 3(x+2) = 0$. Dând factor comun $x + 2$ avem $(x+2)(x-2-3) = 0$, sau $(x+2)(x-5) = 0$, de unde $x + 2 = 0$ sau $x - 5 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = -2$ şi $x_2 = 5$.
11. $\boxed{A}$: Avem $AB = AM + MB$, de unde $MB = AB - AM = 12 - AM$. Înlocuind MB în relaţia $AM = 3MB$ obţinem $AM = 3(12 - AM)$, echivalent cu $AM = 36 - 3AM$, sau $4AM = 36$. De aici $AM = \frac{36}{4} = 9\ cm$.
12. $\boxed{C}$: $\frac{3}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie p numărul de pagini citite de elev în prima zi. Cum în fiecare zi citeşte cu 5 pagini mai mult decât în ziua precedentă înseamnă că în a doua zi citeşte $p+5$ pagini, în a treia zi $(p+5)+5=p+10$ pagini, în a patra zi $(p+10)+5=p+15$ pagini, iar în a cincea zi $(p+15)+5=p+20$ pagini. Cum cartea are 375 pagini şi elevul o termină în 5 zile, avem $p+(p+5)+(p+10)+(p+15)+(p+20)=375$, ceea ce este echivalent cu $5p+50=375$, sau $5p=375-50$, de unde $p=\frac{325}{5}=\boxed{65}$ pagini.

    b. Dacă în prima zi citeşte q pagini, iar apoi citeşte un număr de pagini dublu decât în ziua precedentă, în seamnă că în a două zi citeşte $2q$ pagini, în a treia zi citeşte $4q$ pagini, iar în a patra zi $8q$ pagini. Avem deci relaţia $q+2q+4q+8q=375$ ceea ce este echivalent cu $15q=375$, iar de aici $q=\frac{375}{15}=25$. Deci elevul citeşte $\boxed{25}$ pagini în prima zi, $\boxed{50}$ pagini în a două zi, $\boxed{100}$ pagini în a treia zi şi $\boxed{200}$ pagini în a patra zi.

14. a. $(x+3)(x-2)=x^2-2x+3x-6=x^2+x-6=x(x+1)-6=x(1+x)-6$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

    b. Pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,-2,2,3\}$ avem

$$\begin{aligned}
E(x) &= \left(\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right):\frac{x^2-9}{x^2+x-6}\\
&= \frac{x-2+x+1-x-2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+x-6}{x^2-9}\\
&\overset{(a)}{=} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x+2}
\end{aligned}$$

    c. Avem

$$\begin{aligned}
a &= \left|E(2\sqrt{5})\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{5}+2}\right| = \frac{1}{2(\sqrt{5}+1)}\\
b &= \left|E(-2\sqrt{5})\right| = \left|\frac{1}{-2\sqrt{5}+2}\right| = \frac{1}{2(\sqrt{5}-1)}
\end{aligned}$$

Media geometrică a numerelor a şi b este egală cu

$$\begin{aligned}
\sqrt{a\cdot b} &= \sqrt{\frac{1}{2(\sqrt{5}+1)}\cdot\frac{1}{2(\sqrt{5}-1)}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2(\sqrt{5}+1)\cdot 2(\sqrt{5}-1)}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{4[(\sqrt{5})^2-1^2]}} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot(5-1)}} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 4}} = \boxed{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

15. a.

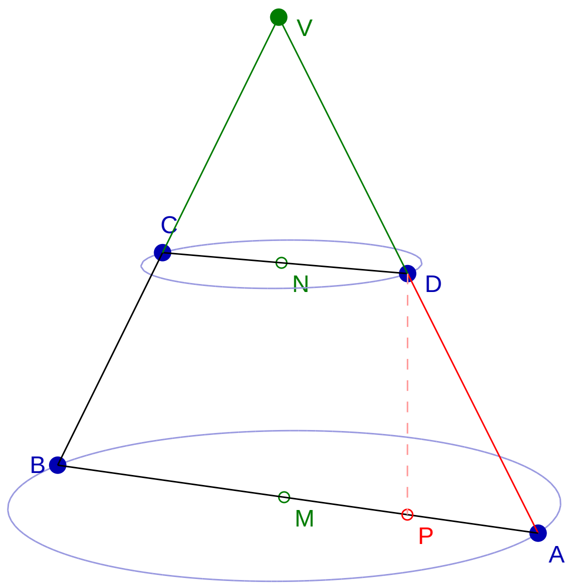

FIGURA 1. Exerciţiul 15(a-b-c).

b. Avem $A_l = \pi g(R+r)$, unde g este generatoarea trunchiului de con, R raza bazei mari şi r raza bazei mici.
Fie P proiecţia lui D pe AB şi fie M centrul bazei mici, iar N centrul bazei mari a trunchiului de con. Avem $R = AN = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8\ cm$, $r = DM = \frac{CD}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$. Generatoarea AD o putem afla din triunghiul dreptunghic APD. Avem $\cos\widehat{DAP} = \frac{AP}{AD}$ (1). Cum trapezul $ABCD$ este isocel $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ şi $AP = AN - DM = 8 - 4 = 4\ cm$. Prin urmare relaţia (1) devine $\cos 60^\circ = \frac{4}{AD}$ sau $\frac{1}{2} = \frac{4}{AD}$, de unde $AD = 8\ cm$.
Deci $A_L = \pi \cdot 8(8+4) = 12 \cdot 8\pi = \boxed{96\pi}\ cm^2$.

c. $V_{con} = \frac{\pi \cdot h(R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$, unde h reprezintă înălţimea trunchiului de con.
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic APD calculăm înălţimea trunchiului de con: $DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ cm$.
Deci $V_{con} = \frac{\pi \cdot 4\sqrt{3}(8^2 + 4^2 + 8 \cdot 4)}{3} = \frac{\pi \cdot 4\sqrt{3}(64+16+32)}{3} = \frac{\pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 112}{3} = \boxed{\frac{448\sqrt{3}\pi}{3}}\ cm^3$.

d. Fie V vârful conului din care provine trunchiul de con. Din asemănarea triunghiurilor VAN şi VDM rezultă $\frac{VA}{VD} = \frac{AN}{DM} = \frac{16}{8}$. Făcând proporţii

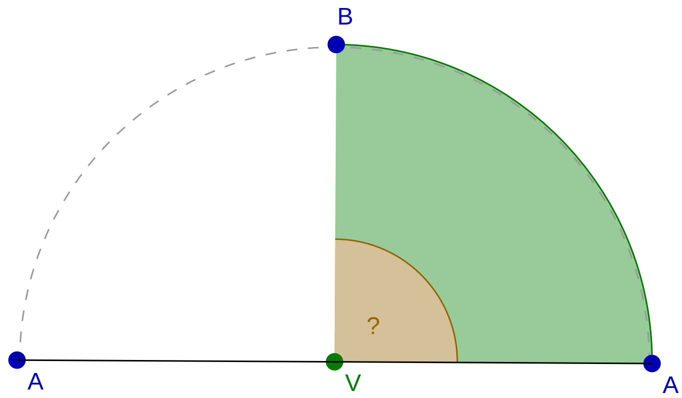

FIGURA 2. Exerciţiul 15(d).

derivate, $\frac{VA - VD}{VD} = \frac{16 - 8}{8}$, de unde $VD = VA - VD = AD = 8$. Deci $VA = 16$. Desfăşurăm conul făcând o tăietură de-a lungul generatoarei ce trece prin A. Obţinem un sector de cerc a cărui lungime poate fi privită în două moduri. Odată ca lungimea bazei conului, adică $2 \cdot \pi \cdot 8 = 16\pi$. Pe de altă parte este lugimea unui sector de cerc de rază fosta generatoare a conului $VA = 16$. Lungimea întregului cerc din care provine acest sector ar fi $2 \cdot \pi \cdot 16 = 32\pi$. Rezultă că unghiul la centru al sectorului este $180°$ (avem o jumătate de cerc). Dar punctul B este chiar la jumătatea acestui sector, deci arcul subîntins de AB este de $90°$. Atunci triunghiul VAB este dreptunghic şi avem $AB = \sqrt{VA^2 + VB^2} = \sqrt{16^2 + 16^2} = \boxed{16\sqrt{2}}$.