BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 26–30

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 26

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $111 - 98 = \boxed{13}$.
2. Media geometrică a numerelor 4 şi 25 este $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = \boxed{10}$.
3. Mai mic este numărul $\boxed{\frac{1}{3}}$.
4. Soluţia ecuaţiei este $x = \frac{-12}{2} = \boxed{-6}$.
5. Un caiet costă $\frac{63}{7} = \boxed{9}$ lei.
6. $P_{\text{hexagon}} = 6 \cdot l = 6 \cdot 4 = \boxed{24}$.
7. Fie O intersecţia diagonalelor. În triunghiul dreptunghic AOB aplicăm teorema lui Pitagora: $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Deci $AC = 2AO = \boxed{8}$ cm.
8. $A_{\text{sferă}} = 4\pi r^2 = \boxed{100}\pi\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $\sqrt{5^2 - 4^2} \cdot \sqrt{5^2 \cdot 4^2} = \sqrt{25 - 16} \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 20 = 60$.
10. $\boxed{B}$: $(x - y)(x + y) - 2y \overset{x-y=1}{=} (x + y) - 2y = x - y = 1$.
11. $\boxed{C}$: Mediana relativă la ipotenuză este jumătate din ipotenuză, deci $AM = MB = MC$. Cum $AM = AB = MB$ rezultă că triunghiul AMB este echilateral, deci $m(\widehat{AMB}) = 60°$. Prin urmare măsura suplementului său, unghiul AMC, este $180° - 60° = 120°$.
12. $\boxed{A}$: Se formează trapezul $MBCD$ cu baza mare latura pătratului, baza mică $MB = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm, şi înălţimea egală tot cu latura pătratului. Deci: $A_{MBCD} = \frac{(4 + 2) \cdot 4}{2} = 3 \cdot 4 = 12\,\text{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ avem: $100a + 10b + c = a + 10b + 100c$, de unde $99a = 99c$ sau $a = c$.

b. Elementele mulţimii A sunt numere de trei cifre de forma $101a+10b$, unde $a \neq 0$. Pentru ca $101a + 10b$ să fie divizibil cu 5 trebuie ca a să fie divizibil cu 5. Cum $a \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ şi $a \neq 0$, din cele 9 posibile valori numai $a = 5$ este divizibil cu 5. Probabilitatea cerută este deci $\boxed{\frac{1}{9}}$.

14. a. Cum $A(2, m)$ aparţine graficului funcţiei f, avem $f(2) = m$ sau

$$2m + n = m \quad (1)$$

Similar, faptul că punctul $B(3, 6)$ este pe graficul funcţiei f se traduce prin $f(3) = 6$ sau

$$3m + n = 6 \quad (2)$$

Din ecuaţia (2) avem: $n = 6-3m$ şi înlocuind în (1) obţinem $2m+6-3m = m$, de unde $m = 3$, ceea ce ne dă $n = -3$.

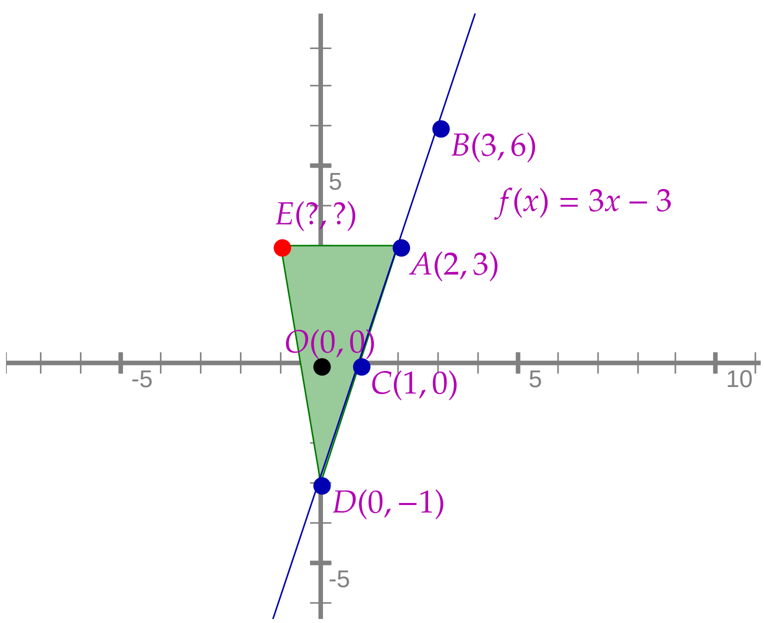

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Fie $E(a, b)$. Cum originea $O(0, 0)$ este centrul de greutate al triunghiului CDE avem $x_O = \frac{x_C + x_D + x_E}{3}$ şi $y_O = \frac{y_C + y_D + y_E}{3}$. Înlocuind coordonatele punctelor deducem: $0 = \frac{1 + 0 + a}{3}$ şi $0 = \frac{f(1) + f(0) + b}{3}$. Prin urmare $a + 1 = 0$ şi $-3 + b = 0$, de unde $\boxed{a = -1}$ şi $\boxed{b = 3}$.

15. a.

b. Generatoarea conului G este raza sectorului de cerc după care se desfăşoară suprfaţa laterală a conului. Lungimea sectorului de cerc după care se desfăşoară suprfaţa laterală a conului este egală cu lungimea cercului de bază, adică $2\pi R = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$ sau $16 \cdot 180°$. Ştiind că $360° R = G \cdot m(\widehat{\text{arc de cerc}})$ avem $G = \dfrac{360° R}{m(\widehat{\text{arc de cerc}})} = \dfrac{16 \cdot 180}{240} = \boxed{12}$ cm.

c. Ştiind $G = 12$ şi $R = 8$ avem $h = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Astfel $V_{con} = \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3} = \dfrac{\pi 64 \cdot 4\sqrt{5}}{3} = \boxed{\dfrac{256\pi\sqrt{5}}{3}}$.

d. Fie VAB secţiunea axială a conului, V' punctul diametral opus lui V pe cercul circumscris triunghiului VAB şi D piciorul perpendicularei din V pe AB. Cum $\widehat{AVD} = \widehat{AVV'}$ şi $\widehat{VDA} = \widehat{VAV'} = 90°$ rezultă că triunghiurile VDA şi VAV' sunt asemenea. De aici $\dfrac{VD}{VA} = \dfrac{VA}{VV'}$ sau $\dfrac{4\sqrt{5}}{12} = \dfrac{12}{VV'}$, de unde $VV' = \dfrac{12^2}{4\sqrt{5}} = \dfrac{36\sqrt{5}}{5}$. Cum VV' este diametru, rezultă că raza este egală cu $\dfrac{\frac{36\sqrt{5}}{5}}{2} = \boxed{\dfrac{18\sqrt{5}}{5}}$.

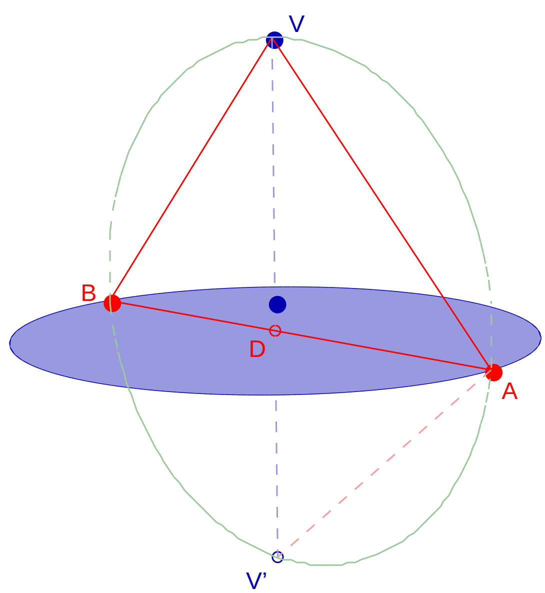

FIGURA 2. Exerciţiul 15.

CAPITOLUL 2

Varianta 27

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $5 \cdot 8 + 2 = 40 + 2 = \boxed{42}$.
2. Împărţind numărătorul şi numitorul cu 3, obţinem $\boxed{\frac{7}{8}}$.
3. Elevul mai are de aşteptat $\boxed{30}$ minute.
4. Din cele şase cifre ale numărului, două sunt pare, deci probabilitatea va fi egală cu $\frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.
5. $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - 92^\circ = \boxed{88^\circ}$.
6. Linia mijlocie este egală cu semisuma bazelor: $l_m = \frac{b+B}{2}$, de unde $B + b = 2 \cdot l_m = 2 \cdot 16 = \boxed{32}$ cm.
7. $A_{lat} = 2\pi rg = 2\pi \cdot 7 \cdot 3 = \boxed{42}\pi\,\text{cm}^2$.
8. $V = L \cdot l \cdot h = 3 \cdot 4 \cdot 5 = \boxed{60}\,\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Dacă avem cel puţin o motocicletă, vor ramâne $48 - 2 = 46$ de roţi. Numărul maxim de maşini pe care îl putem avea este 11, deoarece $4 \cdot 11 = 44$. Observăm ca mai ramân două roţi deci vor fi două motociclete.
10. $\boxed{D}$: Ecuaţia are o singură soluţie când $\Delta = 0$. Aceasta revine la $(-m)^2 - 4(m-1) = 0$ echivalent cu $m^2 - 4m + 4 = 0$ sau $(m-2)^2 = 0$. De unde $m = 2$.
11. $\boxed{B}$: Lungimea diametrului cercului circumscris unui pătrat este egală cu lungimea diagonalei pătratului. Ştiind lungimea diagonalei egală cu 8 cm, deducem lungimea laturii pătratului ca fiind $\frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. Deci perimetrul pătratului este $4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ cm.
12. $\boxed{B}$: $A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{A}}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 15\sqrt{2}\,\text{cm}^2$

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie $S = 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^{50}$ (1). Înmulţind ambii membri ai relaţiei (1) cu 2 avem: $2S = (2^1+2^2+2^3+...+2^{50})+2^{51}$ echivalent cu $2S = (S-1)+2^{51}$ sau $S = 2^{51}-1$, ceea ce demonstrează relaţia cerută.

b. Elevul citeşte $1+2+2^2+2^3+...+2^n$ pagini de carte în $n+1$ zile. La fel ca la punctul precedent se arată că

$$1+2+2^2+2^3+...+2^n = 2^{n+1}-1$$

Deci $2^{n+1}-1 = 1023$, echivalent cu $2^{n+1} = 1024 = 2^{10}$, de unde $n+1 = 10$. Elevul citeşte 1023 de pagini în $n+1 = \boxed{10}$ zile.

14. a. $f(3)+f(7) = 3a+b+7a+b = 10a+2b$, iar $2\cdot f(5) = 2(5a+b) = 10a+2b$. Deci $f(3)+f(7) = 2\cdot f(5)$.

b. Din $A(0,\sqrt{3})$ aparţine graficului funcţiei f avem: $f(0) = \sqrt{3}$ sau $b = \sqrt{3}$. Similar, cum $B(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$ aparţine graficului funcţiei f avem $\frac{\sqrt{3}}{2}a+b = \frac{3}{2}$, echivalent cu $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\sqrt{3} = \frac{3}{2}$ de unde $a = \frac{\frac{3}{2}-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$.

Avem deci $f(x) = \boxed{(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}}$.

c. Inecuaţia $f(x)\leq 2$ este echivalentă cu $(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}\leq 2$ sau $(\sqrt{3}-2)x\leq 2-\sqrt{3}$. Împărţind cu $\sqrt{3}-2$ care este număr negativ avem $x\geq -1$, deci $\boxed{x\in[-1,\infty)}$.

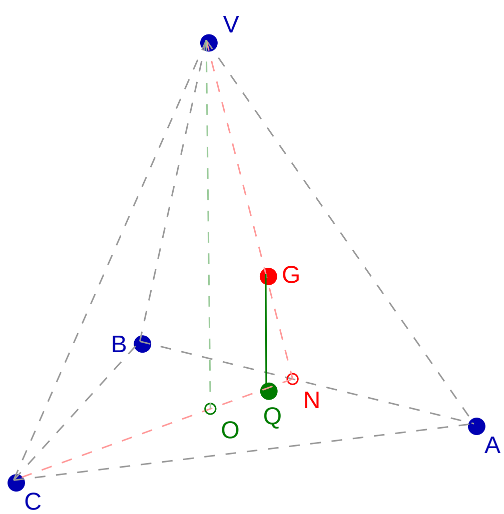

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. Fie M mijlocul lui BC. Din $AM \perp BC$ şi $VM \perp BC$ (mediana în triunghiul echilateral este şi înălţime) rezultă că $BC \perp (VAM)$ deoarece este perpendiculară pe două drepte concurente din plan. In particular $BC \perp VA$.

c. $V_{VABC} = \frac{1}{3}A_{\Delta ABC} \cdot VO$, unde O este piciorul perpendicularei din V pe planul (ABC). O coincide cu centrul de greutate a triunghiului ABC, deci $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. În triunghiul dreptunghic VOA aplicând teorema lui Pitagora avem: $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36-12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Prin urmare,
$V_{VABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{18\sqrt{2}}$

d. Fie G centrul de greutate al triunghiului echilateral VAB, Q piciorul perpendicularei din G pe planul (ABC) şi N piciorul perpendicularei din V pe AB. Cum înălţimea este şi mediană într-un triunghi echilateral, rezultă că $G \in VN$. Cum $GQ \perp (ABC)$ şi $VN \perp AB$ din teorema celor trei perpendiculare avem $NQ \perp AB$. Deci $Q \in CN$. Având $GQ \| VO$ rezultă că triunghiurile GQN şi VON sunt asemenea. Avem deci, $\frac{GQ}{VO} = \frac{GN}{VN}$. Deoarece $NG = \frac{1}{3}VN$ (centrul de greutate se găseşte la o treime de bază) obţinem $\frac{GQ}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$, de unde $GQ = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 28

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $104 : 8 = \boxed{13}$.
2. Cel mai mare divizor comun al numerelor $6 = 2 \cdot 3$ şi $9 = 3^2$ este $\boxed{3}$.
3. $\frac{35}{100} \cdot 60 = \boxed{21}$.
4. Dintre numerele 1010 şi 1101 mai mare este numărul $\boxed{1101}$.
5. Complementul unghiului de măsură 27° are măsura egală cu $90^\circ - 27^\circ = \boxed{63^\circ}$.
6. $A = l^2 = 3^2 = \boxed{9}\,\text{cm}^2$.
7. În triunghiul dreptunghic având ca ipotenuză generatoarea conului şi catete raza bazei şi înălţimea, aplicăm teorema lui Pitagora. Obţinem: $g^2 = r^2 + h^2$, de unde $r^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, deci $r = \boxed{5}$ cm.
8. Piramida triunghiulară are 6 muchii, deci lungimea unei muchii este $\frac{18}{6} = \boxed{3}$ cm.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Notăm $|A|$ cardinalul mulţimii A, adică numărul elementelor mulţimii. Avem $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ sau $200 = 125 + 125 - |A \cap B|$, de unde $|A \cap B| = 250 - 200 = \boxed{50}$.
10. $\boxed{D}$: Din prima ecuaţie a sistemului, obţinem $y = -2x$, şi, înlocuind în a doua ecuaţie,

$$x - 4x = -3$$

De aici, $x = 1$ şi $y = -2$.

11. $\boxed{C}$: Cum proiecţiile catetelor pe ipotenuză sunt 4 cm şi 9 cm, ipotenuza are lungimea $4 + 9 = 13$ cm. Aplicând teorema înălţimii care spune că:
într-un triunghi dreptunghic înălţimea dusă din unghiul drept este medie proporţională între proiecţiile catetelor pe ipotenuză,
avem lungimea înălţimii egală cu $\sqrt{4 \cdot 9} = 6$ cm. Aria triunghiului este $\dfrac{6 \cdot 13}{2} = 39\,\text{cm}^2$.

12. $\boxed{A}$: Fie O centrul cercului, AB coarda şi D proiecţia lui O pe coarda AB. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ADO: $DO = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

a. Dacă notăm cu x numărul copiilor şi cu y preţul obiectului, obţinem următoarele ecuaţii: $20x = y - 5 \quad (1)$ şi $30x = y + 25 \quad (2)$, Scăzând ecuaţia (1) din ecuaţia (2), găsim că $10x = 30$. De aici, $x = 3$ deci sunt $\boxed{3}$ copii.

b. Înlocuindu-l pe x în una din ecuaţiile de mai sus, aflăm $y = 65$, deci preţul obiectului este $\boxed{65}$ lei.

14.

a. Cum $A(1, \frac{5}{2})$ aparţine graficului lui f, avem $f(1) = \frac{5}{2}$ echivalent cu $2 + a = \frac{5}{2}$, de unde $a = \frac{5}{2} - 2 = \boxed{\frac{1}{2}}$. Similar, cum $A(1, \frac{5}{2})$ aparţine graficului lui g, avem $g(1) = \frac{5}{2}$ echivalent $1,5 - b = \frac{5}{2}$, de unde $b = 1,5 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \boxed{-1}$.

b. Pentru $a = 0,5$ funcţia are forma $f(x) = 2x + 0,5$. Atunci $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(20) = (2 \cdot 1 + 0,5) + (2 \cdot 2 + 0,5) + (2 \cdot 3 + 0,5) + ... + (2 \cdot 20 + 0,5) = 2(1 + 2 + ... + 20) + 20 \cdot 0,5 = 2\frac{20 \cdot (20+1)}{2} + 10 = 20 \cdot 21 + 10 = \boxed{430}$.

c. Substituind f şi g, inecuaţia $f(x) \leq 2g(x) + 1$ devine $2x + 0,5 \leq 2(1,5x + 1) + 1$ echivalent cu $2x - 3x \leq 3 - 0,5$ sau $-x \leq 2,5$. Înmulţind cu -1 avem $x \geq -\frac{5}{2}$. Deci $\boxed{x \in \left[-\frac{5}{2}, \infty\right)}$.

15.

a.

b. Cum prisma este dreaptă, cu baza triunghi echilateral şi $AB = BB'$, rezultă că toate muchiile prismei sunt congruente. Avem $V_{ABCDA'B'C'} = \text{Aria}_{ABC} \cdot AA' = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot AA' \overset{AB=AC=AA'}{=} \frac{AB^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$, de unde $AB^3 = \frac{4V_{ABCA'B'C'}}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 54\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 216$. De aici, $AB = 6\ cm$.

c. Din $MC \perp (ABB')$ şi $MC \subset (MCB')$ rezultă că $(MCB') \perp (ABB')$.

d. Fie H piciorul perpendicularei din B pe MB'. Cum $BH \perp MB'$ şi $BH \perp MC$, avem $BH \perp (MCB')$. Distanţa de la B la planul (MCB') este BH. In triunghiul dreptunghic $BB'M$, cu teorema lui Pitagora, determinăm ipotenuza $B'M =$

$\sqrt{MB^2 + B'B^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$. Atunci în acelaşi triunghi, înălţimea este $BH = \dfrac{MB \cdot B'B}{B'M} = \dfrac{3 \cdot 6}{3\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{6\sqrt{5}}{5}}$.

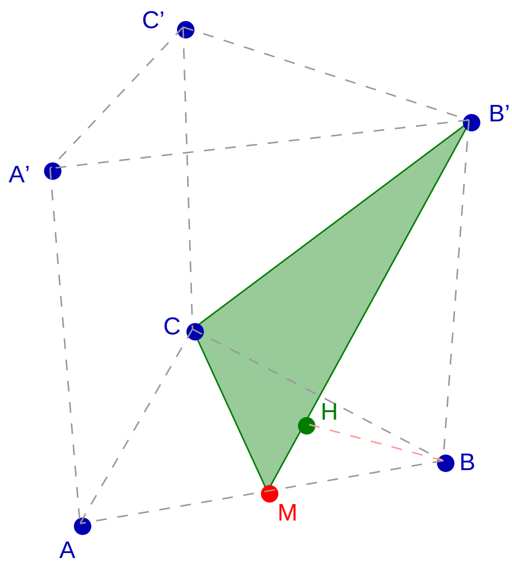

Figura 1. Exerciţiul 15.

CAPITOLUL 4

Varianta 29

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. Numărul divizibil cu 2 este $\boxed{8}$.
2. $37 \cdot 7 = \boxed{259}$
3. $A \cap B = \boxed{\{3\}}$.
4. Mai mic este numărul $a = \boxed{1,234}$.
5. $1\,\text{kg} = 1000\,$g, deci $3\,\text{kg} = \boxed{3000}\,$g.
6. $A_{dreptunghi} = L \cdot l = 8 \cdot 5 = \boxed{40}\,\text{cm}^2$
7. $V_{con} = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{10^2 \cdot 6 \cdot \pi}{3} = \boxed{200}\,\pi\,\text{cm}^3$
8. $A_t = 6 \cdot A_{\text{feţei}} = 6 \cdot 2^2 = \boxed{24}\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: $f(-1) - f(-2) \cdot (-1-2) = (-1+3) - (-2+3) \cdot (-3) = 2 - (-3) = 5$.
10. $\boxed{C}$: Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$, de unde $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$ şi $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$. Deci soluţiile sunt în $[1,4]$.
11. $\boxed{D}$: Triunghiul ABC este dreptunghic (unghiul $\hat{C}$ este înscris într-un semicerc, deci unghi drept). Prin urmare din cele trei unghiuri, două sunt ascuţite, deci probabilitatea ca alegând la întâmplare un unghi al triunghiului ABC, acesta să fie ascuţit este $\dfrac{2}{3}$.
12. $\boxed{D}$: $A_{ABCD} = 2A_{ABD} = 2\dfrac{AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ}{2} \overset{AB=AD}{=} AB^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Din ipoteză aria rombului este $24\sqrt{3}$, deci $24\sqrt{3} = AB^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $AB^2 = \dfrac{48\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 48$ şi $AB = 4\sqrt{3}$. Fie O intersecţia diagonalelor. În triunghiul dreptunghic AOB avem: $\cos 30^\circ = \dfrac{AO}{AB}$, de unde $AO = AB \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$. Deci $AC = 2AO = 12\,$cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Notăm cele două numere cu a şi b. Media aritmetică este $\frac{a+b}{2} = 61,5$. De aici, $a + b = 61.5 \cdot 2 = \boxed{123}$.

b. Putem scoate pe b din valoarea raportului $\frac{b}{a} = 0,64$, obţinem $b = 0,64a$. Înlocuind în suma aflată la punctul precedent, avem că $a + 0,64a = 123$, de unde $a = \frac{123}{1,64} = 75$. Media geometrică va fi $\sqrt{ab} = \sqrt{a \cdot 0,64a} = \sqrt{0,64a^2} = 0,8a = 0,8 \cdot 75 = \boxed{60}$.

14. a. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{2} = |1-\sqrt{2}| - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = \boxed{-1}$.

b. $9n^2 + 6n + 1 = (3n)^2 + 2 \cdot 3n + 1 = (3n+1)^2$ care este pătrat perfect $\forall n \in \mathbb{N}$.

c. Să observăm mai întâi că

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{9y^2 + 6y + 10} \\ &= \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(3y+1)^2 + 9} \end{aligned}$$

Cum $\sqrt{(x-3)^2} \geq 0$ şi $\sqrt{(3y+1)^2 + 9} \geq 3$, valoarea minimă a lui E este $\boxed{3}$ şi se obţine când $x - 3 = 0$ şi $3y + 1 = 0$, adică pentru $x = 3$ şi $y = -\frac{1}{3}$.

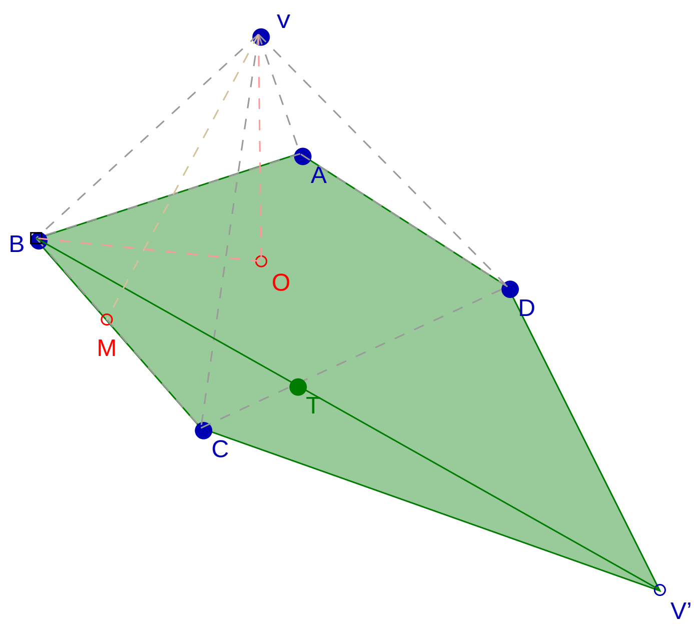

FIGURA 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. În triunghiul dreptunghic VMC aplicăm teorema lui Pitagora: $MC = \sqrt{VC^2 - VM^2} = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{100 - 75} = 5$. Deci $AB = BC = 2MC = 10$ cm.

c. Fie O proiecţia lui V pe planul $(ABCD)$. Unghiul dintre VB şi planul (ABC) este unghiul VBO. În triunghiul dreptunghic VOB: $\cos\widehat{VBO} = \frac{OB}{VB} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\widehat{VBO} = \boxed{45^\circ}$.

d. Faţa VCD o "culcăm" pe planul bazei $(ABCD)$. Atunci se vede că suma $VT+TM$ este minimă când punctul T este intersecţia dintre dreptele VM şi CD. Fie E piciorul perpendicularei din V pe dreapta BC. Observăm că $VE = 5$ şi folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VCE, avem $CE = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$. Triunghiurile MCT şi MVE sunt asemenea, deci $\frac{CT}{VE} = \frac{MC}{ME}$. Substituind valorile numerice, $\frac{CT}{5} = \frac{5}{5+5\sqrt{3}}$. De aici

$$CT = \frac{25}{5(\sqrt{3}+1)} = \frac{5(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1} = \boxed{\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}}$$

CAPITOLUL 5

Varianta 30

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $2,5 - 2,25 = \boxed{0,25}$
2. Cel mai mare element al mulţimii A este $\boxed{9}$.
3. Obţinem $x \leq 7 - 5$ echivalent cu $x \leq 2$ sau $x \in \boxed{(-\infty, 2]}$
4. Cel mai mare număr scris în baza zece de forma $\overline{32x}$ divizibil cu 3 este $\boxed{327}$ (suma cifrelor trebuie să fie divizibilă cu 3).
5. $A_{disc} = \pi r^2 = \boxed{169}\pi$.
6. Înălţimea triunghiului echilateral de latură 12 cm este $\dfrac{12\sqrt{3}}{2} = \boxed{6\sqrt{3}}$ cm.
7. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptughic format de diagonala D a cubului cu diagonala d a unei feţe şi cu latura cubului, obţinem: $D^2 = d^2 + l^2$. Aplicând din nou teorema lui Pitagora se obţine diagonala d ca fiind $l\sqrt{2}$. Ecuaţia de mai sus devine: $D^2 = 2l^2 + l^2 = 3l^2$, de unde $l = \frac{D}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{6}$ cm.
8. $V_{\text{piramidă}} = \dfrac{A_{\text{bazei}} \cdot h}{3} = \dfrac{16 \cdot 6}{3} = \boxed{32}\,\text{cm}^3$

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: Ecuaţia se poate scrie $x^2 - 2x + 3x - 6 = 0$, sau $x(x-2) + 3(x-2) = (x+3)(x-2) = 0$. Cele două soluţii sunt -3 şi 2. Deci numărul natural soluţie a ecuaţiei este 2.
10. $\boxed{B}$: Media geometrică este $\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\sqrt{10} - 3\right)\left(\sqrt{10} + 3\right)}$. Cu formula $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, obţinem $\sqrt{ab} = \sqrt{10-9} = 1$.
11. $\boxed{B}$: Ştiind că $\hat{B} + \hat{C} = 180° - 70° = 110°$, avem $\widehat{BIC} = 180° - \left(\dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2}\right) = 180° - \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 180° - \dfrac{110°}{2} = 180° - 55° = 125°$.
12. $\boxed{D}$: Din formula ariei aflăm lungimea L a dreptunghiului: $L = \dfrac{A}{l} = \dfrac{144}{9} = 16$ cm. Atunci perimetrul este $P = 2(L + l) = 2(16 + 9) = 50$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Să notăm cu x numărul zilelor dupa care cantităţile de marfă din cele două depozite sunt egale. Obţinem ecuaţia:

$$2800 - 100x = 1300 - 25x$$

sau $75x = 1500$, de unde $x = 20$. Deci după $\boxed{20}$ zile există cantităţii egale de marfă în cele două depozite.

b. Notăm cu y numărul căutat de zile. Ecuaţia devine:

$$2800 - 100y = 2(1300 - 25y)$$

ceea ce este echivalent cu $200 = 50y$. Deci după $\boxed{4}$ zile cantitatea de marfă din primul depozit este dublă faţă de cea rămasă în cel de-al doilea depozit.

14. a. Cum $A(-2, 2)$ aparţine graficului funcţiei f, avem $f(-2) = 2$ echivalent cu $-2(a-3) + b + 1 = 2$ sau $2a - b = 5 \quad (1)$. Similar, $B(3, 2)$ aparţine graficului funcţiei f revine la $f(3) = 2$, echivalent cu $3(a-3) + b + 1 = 2$ sau $3a + b = 10 \quad (2)$. Scoţîndu-l pe $b = 2a - 5$ din (1) şi înlocuindu-l în (2), găsim: $3a + 2a - 5 = 10$, de unde $\boxed{a = 3}$ şi $\boxed{b = 1}$.

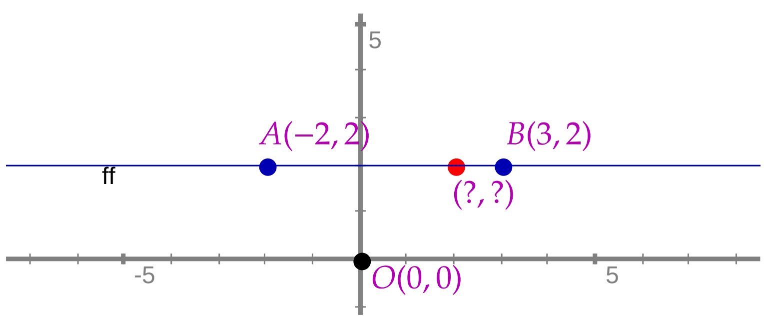

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Graficul funcţiei $f(x) = 2$ este o dreaptă paralelă cu axa Oy. Punctul situat pe graficul lui f care are coordonatele egale este $\boxed{(2, 2)}$.

15. a.

b. Fie R raza bazei mari, r raza bazei mici, h înălţimea şi g generatoarea trunchiului de con. Din ipoteză avem: $\frac{R}{r} = \frac{3}{2} \quad (1)$ şi $\frac{R}{h} = \frac{3}{\sqrt{3}} \quad (2)$. Într-un trunchi de con avem relaţia: $g^2 = (R-r)^2 + h^2 \quad (3)$. Din relaţia (1) avem $r = \frac{2R}{3}$, iar din relaţia (2) avem $h = \frac{\sqrt{3}R}{3}$. Înlocuind în relaţia

(3) obţinem: $8^2 = \left(R - \frac{2R}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}R}{3}\right)^2$ echivalent cu $64 = \frac{R^2}{9} + \frac{3R^2}{9}$ sau $64 = \frac{4R^2}{9}$, de unde $R^2 = \frac{64 \cdot 9}{4}$, deci $R = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ cm.

c. $A_{\text{laterală}} = \pi \cdot g(R + r) = \pi \cdot 8(12 + 8) = \boxed{160}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$.

d. Egalitatea volumelor din ipoteză revine la

$$\frac{\pi R^2 \cdot SO}{3} = \frac{\pi r^2 (h - SO)}{3}$$

ceea ce este echivalent cu $R^2 \cdot SO = r^2(h - SO)$. Înlocuind $R = 12$, $r = 8$ şi $h = 4\sqrt{3}$ avem: $144SO = 64(4\sqrt{3} - SO)$ sau $208SO = 256\sqrt{3}$, de unde $SO = \frac{256\sqrt{3}}{208} = \boxed{\frac{16\sqrt{3}}{13}}$.

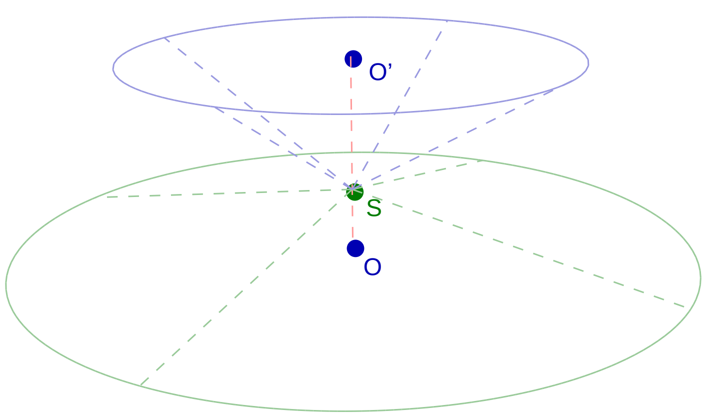

FIGURA 2. Exerciţiul 15.