BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 89

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 89

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $\cos\widehat{BAC} = \cos 60^\circ = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(b) Folosim una din formulele standard ale produsului scalar:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 10 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{50}\,.$$

(c) Aria triunghiului ABC este

$$S = \frac{|BA| \cdot |BC| \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \boxed{25\sqrt{3}}\,.$$

(d) Fie h lungimea înălţimii căutate. Aria triunghiului este egală cu $S = \frac{h \cdot |BC|}{2} = 5h$. Ţinând cont de punctul precedent, rezultă $5h = 25\sqrt{3}$, de unde $\boxed{h = 5\sqrt{3}}$.

(e) Folosim teorema cosinusului, sau, în limbaj vectorial, calculăm

$$\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\,.$$

Folosind rezultatul de la punctul (b) (toate unghiurile triunghiului au măsura de 60°) rezultă $\overrightarrow{AD}^2 = 100 + 2 \cdot 50 + 100 = 300$, de unde $\boxed{|AD| = 10\sqrt{3}}$.

(f) În orice triunghi ABC raza R a cercului circumscris verifică relaţia $|BC| = 2R\sin\hat{A}$. În cazul de faţă, $10 = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{10}{\sqrt{3}}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Conform teoremei lui Bézout, restul împărţirii polinomului $f = 2X^3 + X^2 + 1$ la $X + 2$ este $\boxed{r = f(-2) = -11}$.

(b) Într-adevăr,

$$f(i) = i^{2007} + i = i\left(i^{2006} + 1\right) = i\left((-1)^{1003} + 1\right) = i \cdot 0 = 0\,.$$

(c) Avem $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) = \boxed{1}$.

(d) Deoarece $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, rangul matricii este strict mai mic decât doi. Deoarece matricea are un element nenul, rangul său este egal cu $\boxed{1}$.

(e) Funcţia de gradul doi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ îşi atinge minimumul în punctul $x_0 = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$. Valoarea minimă este deci

$$\min f = f(2) = \boxed{-1}.$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Avem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x - \sqrt{x^2-1}) = -\infty - \infty = \boxed{-\infty}.$$

(b) Amplificând cu “conjugatul” obţinem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}.$$

În consecinţă dreapta de ecuaţie $\boxed{y = 0}$ este asimptota orizontală către ∞ la graficul funcţiei f.

(c) Avem

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \boxed{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

(d) Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x = 2$, adică $\boxed{f'(2) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

(e) Observăm că

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 = -f'(x), \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Folosind teorema Leibnitz–Newton rezultă

$$\int_2^{\sqrt{10}} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = -\int_2^{\sqrt{10}} f'(x)\, dx = -\left(f\left(\sqrt{10}\right) - f(2)\right) = \boxed{5 - \sqrt{3} - \sqrt{10}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare. În primul rând observăm că funcţia g este bine definită pe G. Într-adevăr, dacă $a, b \in \mathbb{R}$ verifică $f_a = f_b$ rezultă $a = f_a(0) = f_b(0) = b$. Prin urmare g este bine definită şi este bijectivă.

(a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned}(f_a \circ f_b)(x) &= f_a(f_b(x)) = f_a(x+b) = x+b+a \\ &= f_{b+a}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aşadar $f_a \circ f_b = f_{b+a} = f_{a+b} = f_b \circ f_a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Folosind punctul precedent,

$$f_a \circ f_0 = f_0 \circ f_a = f_{a+0} = f_a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

(c) Folosind din nou punctul (a), obţinem

$$f_a \circ f_{-a} = f_{-a} \circ f_a = f_{(-a)+a} = f_0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

(d) O reformulare a punctului (a) este faptul că G este parte stabilă în raport cu operaţiile de compunere a funcţiilor. In general compunerea funcţiilor este asociativă şi în plus, compunerea funcţiilor este comutativă pe G. Punctul (b) este echivalent cu faptul că f_0 este element neutru în raport cu această operaţie (de altfel, f_0 este funcţia identitate pe $\mathbb{R}$), iar punctul (c) reprezintă faptul că orice element din G este inversabil. Aşadar $(G, \circ)$ este grup comutativ.

(e) În primul rând, $f_a \circ f_a \circ f_a = f_{a+a+a} = f_{3a}$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Ecuaţia devine

$$f_{3a} = f_{15} \Leftrightarrow 3a = 15 \Leftrightarrow \boxed{a = 5}.$$

(f) Folosind definiţia funcţiei g precum şi propoziţia de la punctul (a) obţinem

$$g(f_a \circ f_b) = g(f_{a+b}) = a + b = g(f_a) + g(f_b), \quad \forall a, b, \in \mathbb{R}.$$

(g) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in \mathbb{R}$. Aplicând în mod repetat identitatea de la (a) este uşor de văzut faptul că

$$\underbrace{f_a \circ f_a \circ \ldots \circ f_a}_{n \text{ ori}} = f_{na}.$$

Aşadar

$$g\left(\underbrace{f_a \circ f_a \circ \ldots \circ f_a}_{n \text{ ori}}\right) = g(f_{na}) = na.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = -\sin x + x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Studiem semnul derivatei funcţiei f', adică semnul derivatei a doua a funcţiei f. Avem

$$f''(x) = -\cos x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Evident, $f''\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(c) Folosind punctul precedent constatăm că f'' este strict pozitivă pe $\mathbb{R}$, cu excepţia unei mulţimi de puncte izolate. Prin urmare f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. În consecinţă,

$$f'(x) > f'(0) = 0, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

(d) Folosind rezultatul de la punctului precedent, semnul derivatei funcţiei f este dat de $f'(x) \begin{cases} > 0 & , x \in (0, \infty) \\ < 0 & , x \in (-\infty, 0) \end{cases}$. Deci f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ respectiv strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$. Prin urmare $x = 0$ este punct de minim global pentru f, deci

$$f(x) \geq f(0) = 1 - 1 + 0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(e) Aplicăm succesiv regula lui l'Hopital, atâta timp cât limita de calculat este nedeterminată de tipul $\frac{0}{0}$. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{24x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{24} = \boxed{\frac{1}{24}}. \end{aligned}$$

(f) Rescriem cantitatea de sub limită sub forma

$$(\cos x - f(x))^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left[\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{2}{x^2}}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Notăm $g(x) = -\frac{x^2}{2}$. Deoarece $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ şi $\lim_{y\to 0} (1 + y)^{1/y} = e$, rezultă

$$\lim_{x\to 0} (\cos x - f(x))^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left[(1 + g(x))^{1/g(x)}\right]^{-1/2} = e^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}.$$

(g) Inegalitatea de la (d) se mai scrie $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in [0, \infty)$. Subsituind x cu x^2 rezultă

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^4}{2}, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

În fine, integrând această inegalitate pe intervalul $[0, 1]$ obţinem

$$\int_0^1 \cos x^2 \, dx \geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(x - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$