BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 87

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 87

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Amplificând cu conjugatul numitorului, numărul complex se poate scrie

$$\frac{3+4i}{i} = \frac{(3+4i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-3i+4}{1} = 4-3i\,.$$

Modulul acestui număr este $|4-3i| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \boxed{5}$.

(b) Condiţia de coliniaritate a vectorilor este $\frac{3}{2} = \frac{\alpha}{4}$, de unde $\alpha = \boxed{6}$.

(c) Fie a latura cubului. Atunci diagonala cubului este $a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, de unde $a = 2$. Aria unei feţe a cubului este $a^2 = 4$ şi cum cubul are 6 feţe, aria totală este $6a^2 = \boxed{24}$.

(d) Coordonatele centrului de greutate al unui triunghi sunt mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor. Condiţia din enunţ revine atunci la

$$\left(\frac{2+a+(-3)}{3}, \frac{-3+b+2}{3}\right) = (0,0)\,.$$

Rezolvând cele două ecuaţii obţinute, obţinem $\boxed{a=b=1}$.

(e) Aria triunghiului ABC este dată de $\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 - (-5)\cdot 4 = 15$. Prin urmare aria este $\boxed{\frac{15}{2}}$.

(f) Conform teoremei cosinus, avem

$$\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{4^2+6^2-8^2}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{16+36-64}{48} = \boxed{-\frac{1}{4}}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Deoarece $\hat{5}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_6$ şi $\hat{5}^{-1} = \hat{5}$, ecuaţia se scrie sub formele echivalente $\hat{5}\cdot\hat{x} = \hat{3} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{5}^{-1}\cdot\hat{3} \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{5}\cdot\hat{3} = \boxed{\hat{3}}$.

(b) Conform relaţiilor lui Viète, avem $x_1+x_2=-1$ şi $x_1x_2=1$. Atunci

$$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=(-1)^2-3\cdot 1=\boxed{-2}.$$

(c) Condiţia necesară şi suficientă ca f să se dividă la g este ca restul împărţirii lui f la g să fie 0. Dar acest rest este $f(1)=1^3+m$. Rezultă deci $m=\boxed{-1}$.

(d) $16^{-x}-64=0 \Leftrightarrow (4^2)^{-x}=4^3 \Leftrightarrow 4^{-2x}=4^3 \Leftrightarrow -2x=3 \Leftrightarrow x=\boxed{-\frac{3}{2}}$.

(e) Inecuaţia din enunţ se poate scrie sub formele echivalente $n^2-2n\le 0 \Leftrightarrow n(n-2)\le 0 \Leftrightarrow n\in[0,2]$. Cum 2 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac această condiţie (şi anume 1 şi 2), probabilitatea este $\boxed{\frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x\in\mathbb{R}$, avem $f'(x)=\boxed{2^x\cdot\ln 2+3^x\cdot\ln 3}$.

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 (2^x+3^x)\,dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln 3}\right)\Bigg|_0^1\\ &= \frac{2^1-2^0}{\ln 2}+\frac{3^1-3^0}{\ln 3}=\boxed{\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 3}}\end{aligned}$$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0)=\ln 2+\ln 3=\boxed{\ln 6}$.

(d) Deoarece $f'(x)=2^x\cdot\ln 2+3^x\cdot\ln 3>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Dând factor comun forţat n la numitor şi numărător, avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n+f(0)}{5n-f(0)}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n+2}{5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(7+\frac{2}{n}\right)}{n\left(5-\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{2}{n}}{5-\frac{2}{n}}=\boxed{\frac{7}{5}}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr $A+I_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=B$.

(b) Deoarece $\det A=0\cdot 1-1\cdot 0=\boxed{0}$, rangul matricei A nu este 2. Având cel puţin un element nenul, rangul lui A este $\boxed{1}$.

(c) $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=A$

(d) Folosind repetat punctul precedent, avem

$$A^{2007} = A^2 \cdot A^{2005} = A \cdot A^{2005} = A^2 \cdot A^{2004} = \ldots \boxed{A}.$$

(e) *Verificarea.* Pentru $n = 1$ obţinem exact relaţia demonstrată la punctul (a). *Pasul de inducţie.* Presupunem că $B^n = I_2+(2^n-1)A$. Atunci folosind punctele (a) şi (c) avem

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \cdot B = [I_2 + (2^n - 1)A](I_2 + A) \\ &= I_2 + (2^n - 1)A + A + (2^n - 1)A^2 \\ &= I_2 + 2^n A + (2^n - 1)A = I_2 + (2^{n+1} - 1)A \end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei matematice, afirmaţia din enunţ este demonstrată.

(f) Matricea $aA + bB + cI_2$ are pe prima linie, a doua coloană elementul 0, deci nu poate fi egală cu matricea C care are pe aceaşi poziţie elementul 8.

(g) La fel ca la punctul (d), obţinem $A^n = A$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind punctul (e), avem

$$X = A^n + B^n = A + I_2 + (2^n - 1)A = I_2 + 2^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n & 2^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\det(A^n + B^n) = 2^n + 1 \neq 0$, deci matricea $A^n + B^n$ este inversabilă.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \boxed{\cos x}$ şi $g'(x) = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$.

(b) Folosind formula $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{1}{\pi}}$

(d) Cum g este continuă pe domeniul de definiţie, graficul lui g poate avea o asimptotă verticală doar în $x = 0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, graficul lui g are ca asimptotă verticală dreapta de ecuaţie $\boxed{x = 0}$.

(e) Fie $t \in \mathbb{R}$ şi $x > 0$. Atunci

$$t^2 \sin^2 x - 2t\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(t \sin x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

(f) Fie $t \in \mathbb{R}$ arbitrar. Integrând inegalitatea de la (e) (exact cum ni s-a "suflat") şi folosind monotonia şi liniaritatea integralei, obţinem

$$t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \, dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(t^2 \sin^2 x - 2t \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx \geq 0$$

(g) Considerăm funcţia de gradul doi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(t) = t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \, dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} \, dx .$$

Conform punctului precedent, avem $h(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Atunci discriminantul acestei funcţii de gradul doi este mai mic sau egal cu zero. Explicitând, obţinem

$$4 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx \right)^2 - 4 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \, dx \right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} \, dx \right) \leq 0$$

inegalitate care este evident echivalentă cu cea din enunţ.
Observaţie. Rezultatul de la ultimul punct se generalizează (urmând **exact** ideile de mai sus) la următorea inegalitate, valabilă pentru orice funcţii integrabile f şi g pe un interval $[a, b]$:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) \, dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) \, dx \int_a^b g^2(x) \, dx .$$

Inegalitatea este foarte importantă. Este cunoscută sub numele de inegalitatea *Cauchy–Schwartz* sau *Cauchy–Buniakowski–Schwartz*.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă așteptăm cu întrebări din materia de facultate.