BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 61

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 61

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Coordonatele punctelor C şi D satisfac ecuaţia dreptei, deci avem

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 4 + 4 &= 0 \\ a \cdot (-4) + b \cdot 0 + 4 &= 0 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie deducem $b = \boxed{-1}$, iar din a doua $a = \boxed{1}$.

(b) Să observăm mai întâi că ecuaţia dreptei AB este $y = x$, deci are panta $m = 1$. Ecuaţia dreptei ce trece prin C şi este paralelă cu AB (adică are tot panta $m = 1$) este $y - 4 = 1 \cdot (x - 0)$, sau $\boxed{y = x + 4}$.

(c) Coordonatele mijlocului segmentului $[CD]$ sunt mediile aritmetice ale coordonatelor lui C şi D, adică $\left(\frac{0 + (-4)}{2}, \frac{4 + 0}{2}\right) = \boxed{(-2, 2)}$.

(d) Centrul cercului căutat este mijlocul segmentului $[BC]$, asdică $(1, 3)$, iar lungimea diametrului este lungimea segmentului $[BC]$, adică $\sqrt{((2-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Atunci raza cercului este $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, iar ecuaţia căutată este

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2}$$

(e) Avem

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2} \\ |AC| &= \sqrt{(0-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Prima soluţie. Folosind teorema cosinus,

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2 \cdot |AB| \cdot |AC|} = \frac{10 + 2 - 8}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

A doua soluţie. Avem $\overrightarrow{AB} = (1, 1)$ şi $\overrightarrow{AC} = (-1, 3)$. Atunci

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{-1 + 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

(f) Conform punctelor (a) şi (b), dreptele AB şi CD sunt paralele. Patrulaterul $ABCD$ este deci un trapez. Distanţa h dintre bazele AB şi CD este distanţa de la $C(0,4)$ la dreapta $AB : y - x = 0$, adică $h = \dfrac{|4-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$. Mai calculăm lungimea segmentului $|CD| = \sqrt{(0-4)^2+(-4-0)^2} = 4\sqrt{2}$. Atunci aria este

$$\frac{(|AB|+|CD|)\cdot h}{2} = \frac{(\sqrt{2}+4\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{2}}{2} = \boxed{10}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Cum pentru orice valoare a lui n numitorul este pozitiv, inecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2n^2 - 11n + 5 \leq 0$. Ecuaţia asociată are rădăcinile $n_1 = 5$ şi $n_2 = \dfrac{1}{2}$, deci soluţia inecuaţiei este $n \in \left[\dfrac{1}{2}, 5\right]$. In acest interval sunt $\boxed{5}$ numere întregi.

(b) $\det A = 2\cdot 3 - 1\cdot 5 = \boxed{1}$

(c) Matricea B are rangul 1, dacă şi numai dacă $\det B = 0$ (rangul este cel puţin 1 căci matricea are elemente nenule). Cum $\det B = 2\cdot 3 - 1\cdot m = 6 - m$, rezultă $m = \boxed{6}$.

(d) Folosind monotonia crescătoare a funcţiei logaritm în baza 3, avem $\log_3 p < 2 \Leftrightarrow p < 3^2 \Leftrightarrow p < 9$. Cum condiţia de existenţă a logaritmului este $p > 0$, soluţia inecuaţiei este $p \in (0,9)$. Cel mai mare număr natural din acest interval este $\boxed{8}$.

(e) Avem o sumă telescopică:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{26\cdot 27} + \frac{1}{27\cdot 28} = \\ &\quad = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{26} - \frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{28}\right) = \\ &\quad = 1 - \frac{1}{28}.\end{aligned}$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \boxed{3x^2 - 3}$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \boxed{\frac{3}{4}}$

(c) Punctele critice sunt soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. In ambele valori derivata îşi schimbă semnul, deci f are $\boxed{2}$ puncte de extrem local.

(d) Se observă că $x_1 = 1$ este o rădăcină a ecuaţiei polinomiale $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$. Atunci polinomul f se divide prin $x - 1$. Descompunem în factori $x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = (x-1)(x^2 + x - 2)$. Ecuaţia de gradul doi $x^2 + x - 2 = 0$ are rădăcinile $x_2 = 1$ şi $x_3 = -2$, deci ecuaţia $f(x) = 0$ are $\boxed{3}$ rădăcini, anume $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2$.
Comentariu: Răspunsul este 3 doar dacă privim ecuaţia ca una polinomială. Dacă ne referim la câte numere reale satisfac ecuaţia, atunci răspunsul este 2. Enunţ prea vag şi interpretabil.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(2n)}{f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3 - 6n + 2}{n^3 - 3n + 2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8 - \frac{6}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}} = \dfrac{8 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \boxed{8}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\overline{1 - i} = \boxed{1 + i}$, $\overline{1} = \boxed{1}$

(b) Cum $(1 - i) \circ (1 - i) = \dfrac{\overline{1 - i}}{1 - i} = \dfrac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \dfrac{2i}{2} = i$, rezultă că $m = \boxed{0}$ şi $n = \boxed{1}$.

(c) Avem $x \circ u = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}}{u} = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = ux,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u = \boxed{1}$

(d) Presupunem că există un asemenea $u \in \mathbb{C}^*$. Atunci în particular, $x \circ u =,\ \forall x \in \mathbb{R}$ şi conform punctului precedent $u = 1$. Obţinem atunci $x \circ 1 = x,\ \forall x \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \overline{x} = x, \forall x \in \mathbb{C}$. Contradicţie, căci de exemplu de la punctul (a) avem $\overline{y_1} \neq y_1$.

(e) Fie $z = a + ib$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

(f) Ecuaţia $z^3 - 1 = 0$ se scrie $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$ şi are rădăcinile $z_1 = 1$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Luăm de exemplu $\omega = z_2$ (puteţi lua la fel de bine şi pe z_3) şi avem $A = \{1, \omega, \overline{\omega}\}$

(g) Fie $x, y \in A$, adică $x^3 = y^3 = 1$. Atunci $(x \circ y)^3 = \left(\dfrac{\overline{x}}{y}\right)^3 = \dfrac{\overline{x^3}}{y^3} = \dfrac{\overline{1}}{1} = 1$, deci $x \circ y \in A$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x^2} = \boxed{\dfrac{-1}{x^2(x^2 + 1)}}$.

Să observăm că funcţia g poate fi extinsă (prin abuz de notaţie) la $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x \cdot \operatorname{arctg} x$. Avem nevoie de această observaţie pentru a evita să calculăm derivata laterală în $x = 0$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \boxed{\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}}$$

(b) Avem $\frac{1}{x} > \frac{x}{x^2+1}$, $\forall x \geq 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 > x^2$, $\forall x \geq 1$. Evident.

(c) De la (a) se vede că derivata funcţiei f este strict negativă pe tot domeniul de definiţie, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ şi în particular şi pe $[1, \infty)$.

Avem $g''(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci g este convexă pe $\mathbb{R}$ şi în particular şi pe $[1, \infty)$.

(d) Conform punctului precedent, $g''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci g' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci pentru orice $x > 0$ avem $g'(x) > g'(0) = 0$ şi de aici rezultă că g este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ şi în particular şi pe $[1, \infty)$.

(e) Avem $\int_1^e \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \ln x\Big|_1^e = \boxed{1}$.

(f) Folosind integrarea prin părţi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1 + x \operatorname{arctg} x)\, dx &= 1 + \int_0^1 (x^2/2)' \operatorname{arctg} x\, dx \\
&= 1 + (x^2/2)\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2/2)\frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= 1 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\
&= 1 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

(g) Observăm mai întâi că $g'(\sqrt{2007}) = \frac{\sqrt{2007}}{2008} + \operatorname{arctg} \sqrt{2007}$.
Folosind punctul (b), pentru orice $x \geq 1$ avem

$$g'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1} < \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x} = f(x)\,.$$

Cum f este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$, rezultă

$$g'(\sqrt{2007}) < f(\sqrt{2007}) < f(1) = \frac{\pi+4}{4}\,.$$

Pe de altă parte ştim din demonstraţia punctului (d), că g' este strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Atunci $g'(\sqrt{2007}) > g'(1) = \frac{\pi+2}{4}$.