BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 57

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 57

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|(1-i)^2| = |1-i|^2 = \left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^2 = \boxed{2}$

(b) Cu formula uzuală distanţa este

$$|OA| = \sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \boxed{5}$$

(c) Coordonetele punctului B satisfac ecuaţiei cercului:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$$

(d) $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 3 = \frac{\sin 3}{\cos 3} \cdot \frac{\cos 3}{\sin 3} = \boxed{1}$

(e) Coordonatele centrului de greutate al triunghiului sunt mediile aritmetice ale coordonatelor vârfurilor. In cazul nostru obţinem

$$\left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{3+2+1}{3}, \frac{2+1+3}{3}\right) = \boxed{(2,2,2)}$$

(f) Se vede uşor că punctele $P(2,3)$ şi$Q(3,2)$ aparţin dreptei de ecuaţie $x+y=5$ (suma coordonatelor este 5 pentru ambele puncte). Această ecuaţie se mai scrie $x+y-5=0$, deci $a = \boxed{1}$ şi $b = \boxed{-5}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, numărul $x^3 - x = (x-1)x(x+1)$ este atât multiplu de 2 cât şi de 3 (ca produs de 3 numere întregi consecutive). Prin urmare $x^3 - x$ se divide cu 6 şi trecând la clase de resturi obţinem că $\hat{x}^3 - \hat{x} = \hat{0}$ în $\mathbb{Z}_6$. Or aceasta, înseamnă exact că $\hat{x}^3 = \hat{x}$, pentru orice $\hat{x} \in \mathbb{Z}_6$.

(b) Folosind punctul (a), avem $(\hat{x}+\hat{y})^3 = \hat{x}+\hat{y} = \hat{x}^3+\hat{y}^3$, pentru orice $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_6$.

(c) Fie $a = g(1)$. Atunci $f(a) = f(g(1)) = 1$, de unde $3a+1 = 1$. Rezultă $a = \boxed{0}$.

(d) $\log_2(x^2+7) = \log_2(2x^2+3x+7) \Leftrightarrow x^2+7 = 2x^2+3x+7 \Leftrightarrow 0 = x^2+3x \Leftrightarrow x \in \boxed{\{-3,0\}}$. Să notăm că pentru ambele soluţii logaritmii iniţiali sunt bine definiţi.

(e) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului. Conform relaţiilor lui Viète, avem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{-1}{1} = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{-24}{1} = -24 \end{aligned}$$

Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1^2 - 2(-24) = \boxed{49}$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{\frac{2x}{x^2+4} - \frac{2x}{x^2+1}}$.

(b) Cum f este o primitivă lui f', avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x)\,dx &= f(1) - f(0) = \ln(1^2+4) - \ln(1^2+1) - \ln(0^2+4) + \ln(0^2+1) \\ &= \boxed{\ln\frac{5}{8}}. \end{aligned}$$

(c) Continuând calculul de la punctul (a), avem

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+4)(x^2+1)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Atunci pentru orice $x < 0$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$. Similar, pentru $x > 0$ avem $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

(d) Limita este exact $f'(1) = \frac{-6 \cdot 1}{(1^2+4)(1^2+1)} = \boxed{-\frac{3}{5}}$.

(e) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) = \ln\frac{x^2+4}{x^2+1} > \ln 1 = 0$. Conform punctului (c), funcţia f are un maxim global în $x = 0$, deci $f(x) \le f(0) = \ln 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare. Pentru simplitate, pentru $a, b \in \mathbb{Q}$ vom nota $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$. Atunci $G = \{X(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 2b^2 = 1\}$. Condiţia $a^2 - 2b^2 = 1$ poate fi exprimată sub forma $\det X(a,b) = 1$.

(a) $I_2 = X(1,0) \in G$ căci $1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$.

(b) Fie $A = X(a,b) \in G$ şi $B = X(c,d) \in G$, adică $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ şi $\det A = a^2 - 2b^2 = 1$, $\det B = c^2 - 2d^2 = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} AB &= X(a,b)X(c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2ad+2bc & ac+2bd \end{pmatrix} \\ &= X(ac+2bd, ad+bc)\,. \end{aligned}$$

Evident $ac + 2bd \in \mathbb{Q}$ şi $ad + bc \in \mathbb{Q}$. De asemenea,

$$(ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 = \det AB = (\det A)(\det B) = 1\,,$$

deci $AB \in G$.

(c) Am observat deja la punctul precedent că $\det A = \boxed{1}$ pentru orice $A \in G$.

(d) Deoarece $\det X = 1$ (consecinţă a faptului că este în G), mtricea X este inversabilă iar inversa ei este $X^{-1} = \dfrac{1}{\det X} X^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix}$.

(e) De exemplu $\boxed{X(3,2)} \in G$ căci $3^3 - 2 \cdot 2^2 = 1$.

(f) Dacă $B = X(a,b)$ cu $a, b > 0$ atunci elementele lui B^n vor fi toate strict pozitive conform calculului de la punctul (b), deci B^n nu poate fi I_2 care are elementele de pe diagonala secundară nule.

(g) Fie $B = X(3,2) \in G$. Demonstrăm că $B^p \neq B^q$, pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$. Într-adevăr, cum B este inversabilă (conform (d)), în caz contrar am avea $B^{p-q} = I_2$, contradicţie cu (f) (am presupus fără a restrânge generalitatea că $p > q$). Cum G conţine mulţimea infinită $\{B^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, rezultă că are cel puţin 2007 de elemente.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > -1$, avem

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \boxed{-\frac{x}{1+x}}$$

şi

$$g'(x) = f'(x) + \left(\frac{x^2}{2}\right)' = -\frac{x}{1+x} + x = \boxed{\frac{x^2}{1+x}}.$$

(b) $f'(0) = g'(0) = \boxed{0}$.

(c) De la punctul (a) vedem că $f'(x) = -\dfrac{x}{1+x} < 0$ pentru orice $x > 0$. Rezultă că funcţia f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$, deci $f(x) < f(0) = 0$ pentru orice $x > 0$. Similar, $g'(x) > 0$ pentru orice $x > 0$, deci funcţia g este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. Rezultă că $g(x) > g(0) = 0$ pentru orice $x > 0$.

(d) În membrul stâng avem suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice cu $a_1 = 1$ şi $a_n = 2n - 1$. Atunci

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = n^2\,, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(e) Notăm cu $P(n)$ afirmaţia din enunţ. Verificarea pentru $n = 1$ este imediată: $1^2 = \dfrac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3}$.

Presupunem că $P(n)$ este adevărată. Atunci

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n+1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=$$
$$=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}+(2n+1)^2$$
$$=\frac{2n+1)[(2n^2-n)+3(2n+1)]}{3}=\frac{(2n+1)(2n^2+5n+3)}{3}$$
$$=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}=\frac{(n+1)[4(n+1)^2-1]}{3}$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. Conform principiului inducţiei matematice $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

(f) Folosind punctele (d) şi (e), avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[1+3+\ldots+(2n-1)]n}{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\frac{4n^3-n}{3}}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

(g) Pentru orice $x>0$ conform (c) avem

$$\ln(1+x)-x<0<\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

inegalităţi ce pot fi puse sub forma

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x\,.$$

Integrând pe intervalul $[0,1]$ aceste inegalităţi de funcţii continue şi folosind monotonia integralei obţinem

$$\frac{1}{3}=\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx<\int_0^1\ln(1+x)\,dx<\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.