BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 56

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 56

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|AB| = \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$

(b) **Prima rezolvare.** Aria este $S = \frac{|\Delta|}{2}$, unde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$. Prin urmare $S = \frac{2}{2} = \boxed{1}$.

A doua rezolvare. Punând punctele pe un sistem de coordonate, intuim că triunghiul ABO este dreptunghic isoscel. Pentru a verifica acest lucru, calculăm distanţele

$$\begin{aligned} |AO| &= \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \\ |BO| &= \sqrt{(0-0)^2 + (0-2)^2} = 2 \end{aligned}$$

Deoarece $|BO|^2 = |AO|^2 + |AB|^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic cu unghiul drept în A. Să observăm de asemenea că $|AB| = |AO|$, deci triunghiul ABO este dreptunghic isoscel (vom folosi acest fapt la punctele următoare). Aria triunghiului este atunci jumătate din produsul catetelor, adică $\frac{|AO| \cdot |AB|}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \boxed{1}$.

(c) Ştim de la punctul precedent că triunghiul AOB este dreptunghic isoscel. Atunci măsura unghiului $\widehat{AOB}$ este de $45°$ şi $\cos \widehat{AOB} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

(d) Coordonatele punctelor trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, deci avem

$$\begin{cases} a + b &= 2 \\ a \cdot 0 + b \cdot 2 &= 2 \end{cases}$$

Din a doua ecuaţie obţinem $b = \boxed{1}$. Substituind în prima găsim şi $a = \boxed{1}$.

(e) Ştim de la punctul (b) a doua rezolvare că triunghiul ABO este dreptunghic, deci $AB \perp AO$. Putem lua astfel punctul $\boxed{C = B}$.

(f) Un punct egal depărtat de A şi B este mijlocul segmentului AB, care are coordonatele mediile aritmetice ale coordonatelor lui A şi B, adică

$$\left(\frac{1+0}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) O mulţime cu n elemente are 2^n submulţimi, deci pentru ca să aibă $8 = 2^3$ submulţimi, va trebui să aibă 3 elemente, din care unul este 8. De exemplu, alegem $\boxed{\{0,1,8\}}$.

(b) Conform relaţiilor lui Viète produsul rădăcinilor ecuaţiei $\boxed{x^2+8=0}$ este

$$x_1x_2 = \frac{8}{1} = 8\,.$$

(c) De exemplu, $f(x) = \boxed{x(x-8)+8 = x^2-8x+8}$ satisface condiţia $f(8)=8$. Se poate arăta că toate funcţiile de gradul doi ce satisfac condiţia din enunţ sunt de forma $f(x) = (ax+b)(x-8)+8$, cu $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(d) Se impun condiţiile de existenţă $a-1>0$ şi $b+1>0$. Egalitatea se scrie echivalent $\log_8(a-1) = \log_8(b+1) \Leftrightarrow a-1=b+1 \Leftrightarrow a=b+2$. Putem lua de exemplu $\boxed{a=2, b=0}$.

(e) Matricea $\boxed{\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ are determinantul $8\cdot 1 - 0\cdot 0 = 8$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{5x^4+3x^2}$.

(b) $(f\circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = \boxed{3}$

(c) Derivata a doua este $f''(x) = 20x^3+6x = x(20x^2+6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi se anulează doar pentru $x=0$. Cum $f''(x)$ şi schimbă semnul în acest punct, rezultă că $\boxed{x=0}$ este punct de inflexiune pentru funcţia f.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(2n)}{f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)^5+(2n)^3+1}{n^5+n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{32n^5+8n^3+1}{n^5+n^3+1} = \boxed{32}$.

(e)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx &= \int_1^2 \left(x^4+x^2+\frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+\ln x\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{2^5}{5}+\frac{2^3}{3}+\ln 2 - \frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\ln 1 = \boxed{\frac{128}{15}+\ln 2}
\end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Conform relaţiilor lui Viète avem $x_1+x_2=4$ şi $x_1x_2=2$. Atunci

$$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = 4^2-2\cdot 2 = \boxed{12 \in \mathbb{N}}\,.$$

(b) Deoarece $\det A = 2\cdot 2 - 1\cdot 2 = \boxed{2} \neq 0$, rangul matricei A este maxim, adică $\boxed{2}$.

(c) Calculăm $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Atunci

$$g(A) = A^2 - 4A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 .$$

(d) Cum $f(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 2\cdot 1 = -1$, avem $g(I_2) = I_2^2 - 4\cdot I_2 + 2\cdot I_2 = -I_2 = f(1)I_2$.

(e) Am văzut la punctul precedent că $B = f(1)\cdot I_2 = -I_2$. Cum $(-I_2)(-I_2) = I_2$, rezultă că B este inversabilă cu inversa $B^{-1} = -I_2 = B$.

(f) Am văzut la punctul (d) că $g(I_2) = -I_2$. Atunci $g(I_2) - g(A) = -I_2 - A^2 + 4A - 2I_2 = -(A^2 - 4A + 3I_2) = -(A - I_2)(A - 3I_2) = (I_2 - A)(A - 3I_2)$. Putem astfel lua $C = \boxed{A - 3I_2}$.

(g) Avem

$$g(X) = O_2 \Leftrightarrow X^2 - 4X + 2I_2 = O_2 \Leftrightarrow X^2 - 4X + 3I_2 = I_2 \Leftrightarrow (I_2 - X)(3I_2 - X) = I_2 .$$

Rezultă că $I_2 - X$ este inversabilă cu inversa $(I_2 - X)^{-1} = \boxed{3I_2 - X}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$f'(x) = \frac{(2x^3)'(x^4+1) - 2x^3(x^4+1)'}{(x^4+1)^2} = \frac{6x^2(x^4+1) - 2x^3\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-2x^6+6x^2}{(x^4+1)^2}$$
$$= \boxed{\frac{-2x^2(x^4-3)}{(x^4+1)^2}} .$$

(b) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^4+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{1+0} = 0$, rezultă că dreapta $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f către ∞.

(c) Deoarece $f'(x) = \frac{2x^2}{(x^4+1)^2}\cdot(3 - x^4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar fracţia $\frac{2x^2}{(x^4+1)^2}$ este pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că semnul derivatei $f'(x)$ este dat de expresia $3 - x^4 = (\sqrt{3} - x^2)(\sqrt{3} + x^2)$. Cum $\sqrt{3} + x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deducem că semnul lui $f'(x)$ este acelaşi cu semnul lui $\sqrt{3} - x^2$. Or această expresie de gradul doi se anulează pentru $\boxed{\sqrt[4]{3}}$ şi $\boxed{-\sqrt[4]{3}}$ şi are şi schimbări de semn în aceste puncte, care prin urmare sunt puncte de extrem pentru f.

(d) Cum numitorii sunt pozitivi, inegalitatea din enunţ este echivalentă cu

$$x^4 + 1 \geq 2x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^* ,$$

evident.

(e) Avem

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2)'}{(x^2)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x^2)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0$$
$$= \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Mai explicit, am utilizat schimbarea de variabilă $y = x^2$.

(f) **Prima rezolvare.** Funcţia f este impară. Atunci integrala ei pe un interval simetric în origine este $\boxed{0}$.

A doua rezolvare Avem

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^4+1)'}{(x^4+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^4+1)\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{0}.$$

(g) Să observăm că avem $\frac{2x^2}{x^4+1} \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Inegalitatea aceasta se demonstrează exact la fel cu cea de la punctul (d). Să mai remarcăm că nu putem folosi numai punctul (d), care este valabil pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, iar în cazul de faţă avem nevoie şi de punctul $x = 0$. Pentru $x \ge 0$, înmulţind cu x această inegalitate obţinem $f(x) \le x$. Integrând pe intervalul $[0, m]$ şi folosind monotonia integralei obţinem

$$\int_0^m f(x)\,dx \le \int_0^m x\,dx = \frac{m^2}{2}.$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.