BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 53

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 53

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Din teorema lui Pitagora lungimea ipotenuzei este egală cu $\sqrt{6^2+8^2}=\boxed{10}$.

(b) Folosind formula distanţei (tot teorema lui Pitagora) obţinem

$$|AC|=\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\boxed{\sqrt{2}}.$$

(c) $\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}$.

(d) Punctele A şi C aparţin dreptei dacă şi numai dacă coordonatele lor îi verifică ecuaţia. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases}3+3a+b=0\\4+4a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+3a+b=0\\1+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-3+b=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}b=0\\a=-1\end{cases}}$$

(e) Aria triunghiului ABC este $S=\frac{|\Delta|}{2}$, unde

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&3\\1&3&2\\1&4&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&3\\0&0&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}=1,$$

aşadar $\boxed{S=\frac{1}{2}}$.

(f) Amplificând cu conjugatul obţinem

$$a+bi=\frac{2+i}{i-2}=\frac{(2+i)(-i-2)}{1^2+2^2}=\frac{-4+1-2i-2i}{5}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i.$$

Deci $\boxed{a=-\frac{3}{5}}$ şi $\boxed{b=-\frac{4}{5}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Ştim că suma celor două rădăcini ale ecuaţiei de gradul doi $ax^2+bx+c=0$ este $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. În cazul problemei de faţă, trebuie mai întâi să ne asigurăm că cele două rădăcini sunt reale: într-adevăr, discriminantul ecuaţiei din enunţ este $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 56 > 0$. Aşadar

$$\boxed{x_1 + x_2 = -4}.$$

(b) $\dfrac{C_5^2}{C_5^3} = \dfrac{C_5^2}{C_5^2} = \boxed{1}$. Am folosit faptul că $C_n^k = C_n^{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n$.

(c) Folosind injectivitatea funcţiei logaritm, avem

$$\log_5(x+1) = \log_5(x^2 + x) \ \Rightarrow\ x + 1 = x^2 = x \ \Leftrightarrow\ x^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ x \in \{-1, 1\}.$$

În acest stadiu, cele două numere de mai sus sunt doar “candidaţi” la soluţia ecuaţiei. Deoarece ni se cer soluţiile pozitive, este uşor de văzut că $\boxed{x = 1}$ este unica soluţie a ecuaţiei date. De altfel, $x = -1$ nu este soluţie din cauză că este în afara domeniului de existenţă a expresiei $\ln(x+1)$.

(d) Avem $10^x = 100 \ \Leftrightarrow\ 10^x = 10^2 \ \Leftrightarrow\ \boxed{x = 2}$.

(e) Deoarece $1! < 2! < 3! = 6 < 20 < 24 = 4! < 5!$, inegalitatea din enunţ este satisfăcută de numai două numere din cinci: $n \in \{4, 5\}$. Probabilitatea cerută este deci $\boxed{p = \dfrac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Conform teoremei Leibnitz–Newton,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = \boxed{\ln 2}.$$

(c) **Prima soluţie.** Deoarece $x^2 + 1 \ge 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ iar funcţia logaritm este strict crescătoare, rezultă că

$$f(x) = \ln(x^2+1) \ge \ln 1 = f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A doua soluţie. Folosind formula de la punctul (a), semnul derivatei funcţiei f este $f'(x) = \begin{cases} < 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ > 0 & , x \in (0, \infty) \end{cases}$. Prin urmare f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ respectiv strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Aşadar $x = 0$ este punct de minim global, deci

$$f(x) = \ln(x^2+1) \ge \ln 1 = f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) Continuând raţionamentul de la punctul precedent se vede că punctul de minim global al funcţiei f este $(0, f(0))$, adică $\boxed{(0,0)}$.

(e) Avem

$$\lim_{x\to\infty} xf'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1+0} = \boxed{2}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Atunci

$$x + y = a + c + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],$$

q.e.d.

(b) Dacă $t \geq 0$ atunci funcţia $x \mapsto tx$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci g, ca restricţie a acestei funcţii, este crescătoare pe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Deoarece

$$g(x + y) = t(x + y) = tx + ty = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

rezultă $g \in F$.

(c) Fie $f \in F$. Atunci $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, de unde $f(0) = 0$.

(d) Fie $f \in F$. Vom arăta mai mult, anume faptul că

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Fixăm $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, folosind eventual în mod repetat proprietatea lui f ca element al mulţimii F, obţinem

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \ldots + f(x)}_{n \text{ ori}} = nf(x).$$

Dacă $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, conform punctului (c) avem $f(nz) + f(-nz) = f(0) = 0$, şi folosind rezultatul tocmai obţinut, rezultă

$$f(nx) = -f(-nx) = -f((-n)x) = -(-n)f(x) = nf(x).$$

Cazul rămas în care $n = 0$ este trivial.

(e) Folosind propoziţia demonstrată la punctul precedent, avem

$$f(a + b\sqrt{2}) = f(a) + f(b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2}), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

(f) Dacă f este crescătoare, atunci $f(0) \leq f(1)$. Dar $f(0) = 0$ şi $f(1) = t$, de unde $t \geq 0$.

(g) Folosind punctul (e) sau (d), rezultă

$$f(n\sqrt{2}) = nf(\sqrt{2}) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Fie $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ arbitrar. Atunci există $n, m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n\sqrt{2} < x < m\sqrt{2}$. Deoarece f este crescătoare, avem

$$0 = f(n\sqrt{2}) \leq f(x) \leq f(m\sqrt{2}) = 0,$$

q.e.d.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f_1(x) = f_0'(x) = e^{2x} \cdot 2 = \boxed{2e^{2x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, graficul funcţiei f_0 are către $-\infty$ asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 0}$.

(c) Propoziţia este evident adevărată pentru $n \in \{0, 1\}$. Presupunem propoziţia adevărată pentr un anumit $n \in \mathbb{N}$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f_{n+1}(x) = f_n'(x) = 2^n e^{2x} \cdot 2 = 2^{n+1} e^{2x},$$

deci propoziţia este adevărată şi pentru $n + 1$. Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

(d) Pentru $n \in \mathbb{N}$ avem

$$f_0(0) + f_1(0) + \ldots + f_n(0) = e^0 + 2 \cdot e^0 + \ldots + 2^n \cdot e^0 = 1 + 2 + \ldots + 2^n = \boxed{2^{n+1} - 1}.$$

(e) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$ avem

$$f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) = e^{2x} + 2e^{2x} + \ldots + 2^n e^{2x} = (2^{n+1} - 1)e^{2x}.$$

Limita din enunţ devine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1} - 1)e^{2x}}{2^{n+1} e^{2x}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \boxed{1}.$$

(f) Fie $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x 2^n e^{2x}\,dx = 2^{n-1} e^{2x}\Big|_0^x = 2^{n-1}(e^{2x} - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Limita din enunţ devine

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{n-1}(e^{2x} - 1)}{2^n e^{2x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(g) Avem

$$f_0(x) + f_1(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^{2x} = 3 \Leftrightarrow 3e^{2x} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}.$$