BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 51

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 51

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Faptul că dreptele date trec prin punctul A revine la sistemul

$$\begin{cases} 1 &= a+b \\ 1 &= b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 &= a+b \\ 2 &= 2b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a &= 0 \\ b &= 1 \end{cases}}$$

(b) Fie l lungimea laturii triunghiului echilateral. Condiţia din enunţ revine la

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3 \Leftrightarrow l = 2\sqrt[4]{3}.$$

Deci perimetrul este $3l = 3 \cdot 2\sqrt[4]{3} = \boxed{6\sqrt[4]{3}}$.

(c) Numărul complex nereal $\boxed{3i}$ are modulul 3.

(d) Incercăm numărul natural nenul $n = \boxed{3}$ şi avem noroc $i^3 + i^4 = -i + 1$. De ce am avut noroc? Pentru că $i^4 = 1$, membrul stâng poate lua numai patru valori posibile, iar aceste valori se obţin dându-i lui n valorile $0, 1, 2, 3$.

(e) Pentru $x = \boxed{0}$ şi $y = \boxed{\frac{\pi}{2}}$, avem $\cos(x+y) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

(f) De exemplu $x = \boxed{k\pi}$ cu $k \in \mathbb{Z}$ este în mulţime, căci $\sin k\pi = 0 = \sin 2k\pi$. Am găsit deci o infinitate de elemente ale mulţimii.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x \geq y$. Atunci

$$C_{x+1}^{y+1} = \frac{(x+1)!}{(y+1)!(x-y)!} = \frac{x+1}{y+1} \cdot \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{x+1}{y+1} C_x^y$$

(b) Evident $\hat{x}$ nu poate fi clasa unui număr par. Verificăm clasele impare: $\hat{1}^2 = 1$, $\hat{3}^2 = \hat{1}$, $\hat{5}^2 = \hat{1}$, $\hat{7}^2 = \hat{1}$. Cum 4 din cele 8 elemente ale lui $\mathbb{Z}_8$ satisfac ecuaţia, probabilitatea cerută este $\frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(c) Fie $a = g(11)$. Atunci $f(a) = f(g(11)) = 11$. Avem deci $a^3 + 10 = 11$, sau $a^3 = 1$, adică $a = 1$. Deci $g(11) = a = \boxed{1}$.

(d) $4^x = 8^x \Leftrightarrow 1 = \frac{8^x}{4^x} \Leftrightarrow 2^0 = 2^x \Leftrightarrow x = \boxed{0}$

(e) Conform relaţiilor lui Viète, avem $x_1x_2x_3 = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{8x^7}$.

(b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^8+1)\,dx = \left(\frac{x^9}{9} + x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{10}{9}}$

(c) Deoarece $f''(x) = 56x^6 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(d) Limita este exact definiţia derivatei funcţiei f în punctul $x = 1$, deci este egală cu $f'(1) = \boxed{8}$.

(e) $\int_0^1 (e^x + \sin x)\,dx = (e^x - \cos x)\Big|_0^1 = (e^1 - \cos 1) - (e^0 - \cos 0) = \boxed{e - \cos 1}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Cum $\det A = 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 1 = \boxed{0}$, rangul lui A nu este 2. Dar A are cel puţin un element nenul, deci rangul este $\boxed{1}$.

(b) $I_2A = A = AI_2 \Rightarrow I_2 \in G$, $A \cdot A = A \cdot A \Rightarrow A \in G$.

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(d) Am văzut la punctul precedent că $A^2 = O_2$. Atunci pentru orice $X \in M_2(\mathbb{C})$ avem $XA^2 = XO_2 = O_2 = O_2X = A^2X$.

(e) Fie de exemplu, $B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Avem

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deci $AB \neq BA$.

(f) Pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$ avem $(aI_2 + bA)A = aA + bA^2 = A(aI_2 + bA)$, deci într-adevăr $aI_2 + bA \in G$.

(g) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $AX = XA$. Această egalitate revine la

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b &= a+c \\ a-b &= b+d \\ c-d &= -a-c \\ c-d &= -b-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= -b \\ d &= a-2b \end{cases}$$

Deci $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{pmatrix} = (a-b)I_2 + bA = xI_2 + yA$, pentru $x = a-b$ şi $y = b$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Avem $f_1(x) = e^x(x^2+2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci

$$f_1'(x) = e^x(x^2+2x) + e^x(2x+2) = \boxed{e^x(x^2+4x+2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^x(x^2+2nx+n(n-1)) + e^x(2x+2n) \\ &= \boxed{e^x(x^2+2(n+1)x+n(n+1)) = f_{n+1}(x)} \end{aligned}$$

(c) $f_n(0) = e^0 n(n-1) = \boxed{n(n-1)}$

(d) Notăm $P(n)$ propoziţia din enuţ. Evident $1\cdot 2 = \frac{(2-1)\cdot 2\cdot(2+1)}{3}$, deci $P(2)$ este adevărată. Presupunem că $P(n)$ este adevărată. Atunci

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + n(n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)[(n-1)+3]}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. Conform principiului inducţiei matematice $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 2$.

(e) Folosind punctele (c) şi (d), avem

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{f_1(0)+f_2(0)+\ldots+f_n(0)}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + \ldots + (n-1)n}{n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(f) Să observăm că funcţia f_n poate fi definită prin aceaşi formulă şi pentru $n \in \mathbb{Z}$ şi relaţia de la punctul (b) este satisfăcută pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci f_{-1} este o primitivă a lui f_0 şi avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_0(x)\,dx &= f_{-1}(1) - f_{-1}(0)\\ &= e^1[1^2 + 2(-1)\cdot 1 + (-1)(-2)] - e^0(-1)(-2)\\ &= \boxed{e-2}\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x[x^2+2(n+1)x+(n+1)n]}{e^x[x^2+2nx+(n-1)n]}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2(n+1)}{x}+\frac{n(n+1)}{x^2}}{1+\frac{2n}{x^2}+\frac{(n-1)n}{x^2}} = \boxed{1}\end{aligned}$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.