BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 50

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 50

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cum $A_1(1,1)$, panta dreptei OA_1 este $\dfrac{1-0}{1-0} = \boxed{1}$.

(b) Toate punctele $A_n(n,1)$ au a doua coordonată 1, deci se află pe dreapta $y = 1$.

(c) Triunghiul OA_0A_1 este dreptunghic isoscel cu lungimea catetelor 1. Atunci aria este $\dfrac{1\cdot 1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$. Putem, desigur, să facem abstracţie de această observaţie şi să folosim formula $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\,,$$

de unde obţinem, evident, acelaşi rezultat.

(d) $d(O,A_n) = \sqrt{(n-0)^2 + (1-0)^2} = \boxed{\sqrt{n^2+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(e) Toate punctele $A0, A_1, \ldots, A_{10}$ se găsesc pe dreapta de ecuaţie $y = 1$. In plus, punctul O împreună cu fiecare din punctele $A_0, A_1, \ldots, A_{10}$ determină câte o dreaptă (aceste ultime drepte sunt două câte două distincte şi diferite de prima). Deci în total aceste puncte determină $1 + 11 = \boxed{12}$ drepte.

(f) Cum toate punctele $A_0, A_1, \ldots, A_{10}$ se găesc pe aceaşi dreaptă, nu putem forma nici un triunghi cu 3 din aceste puncte. Triunghiurile pe care le putem forma vor fi OA_iA_j, cu $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Cum perechea A_iA_j poate fi aleasă în $C_{11}^2 = \dfrac{10\cdot 11}{2} = 55$ moduri, există $\boxed{55}$ triunghiuri de tipul cerut.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 3\cdot 5 = \boxed{-8}$

(b) Mulţimea X este de forma $\{3,4,5,6\} \cup A$, unde A este o submulţime a lui $\{1,2\}$. Cum o mulţime de 2 elemente, are 2^2 submulţimi, ecuaţia are $\boxed{4}$ soluţii.

(c) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Deoarece $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$, avem $A^{2007} = A^2 \cdot A^{2007} = O_2 \cdot A^{2007} = \boxed{O_2}$.

(d) Orice rădăcină raţională a ecuaţiei $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ este de forma $\frac{p}{q}$, cu p divizor al termenului liber -6, iar q divizor al coeficientului dominant 1. Rezultă că rădăcinile raţionale ale ecuaţiei date sunt în mod necesar numere întregi, divizori ai lui -6. Incercăm pe rând (şi suntem norocoşi!)

$$\begin{aligned} 1^3 - 6\cdot 1^2 + 11\cdot 1 - 6 &= 0\\ 2^3 - 6\cdot 2^2 + 11\cdot 2 - 6 &= 0\\ 3^3 - 6\cdot 3^2 + 11\cdot 3 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Cum un polinom de gradul 3 nu poate avea decât cel mult 3 rădăcini raţionale, rezultă că toate rădăcinile ecuaţiei date sunt $\boxed{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3}$.

(e) Inecuaţia $n^2 - 2n \geq 0 \Leftrightarrow n(n-2) \geq 0$ are soluţia $n \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$. Deci, elementele mulţimii date care satisfac inecuaţia sunt $2, 3, 4, 5$ iar probabilitatea este $\boxed{\frac{4}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$.

(b) $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0) = \boxed{0}$.

(d) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă că graficul funcţiei nu are asimptotă orizontală către ∞. Căutăm o asimptotă oblică $y = mx + n$. Avem

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1\\ n &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 \end{aligned}$$

Deci graficul funcţiei f are către ∞ asimptota oblică $\boxed{y = x}$.

(e)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \boxed{-1} \end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Pentru simplitatea scrierii, vom nota $f_a(x) = ax + 1 - a$. Observăm că toate elementele mulţimii G sunt funcţii de forma f_a, cu $a \in \mathbb{R}^*$. Atunci pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$, avem

$$\begin{aligned}(f_a \circ f_b)(x) &= f_a(f_b(x)) = af_b(x) + 1 - b = a(bx + 1 - b) + 1 - a = abx + 1 - ab \\ &= f_{ab}(x)\,.\end{aligned}$$

Cum $ab \in \mathbb{R}^*$, rezultă că $f_a \circ f_b = f_{ab} \in G$.

(b) $1_{\mathbb{R}} = f_1 \in G$.

(c) Evident, căci funcţia $1_{\mathbb{R}}$ este elementul neutru al compunerii funcţiilor. Dacă tot vreţi să scrieţi altceva, puteţi de exemplu nota că $f_a \circ 1_{\mathbb{R}} = f_a \circ f_1 = f_{a\cdot 1} = f_a$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$. Cealaltă egalitate rezultă în mod similar.

(d) Funcţia f din enunţ este f_a, iar g este $f_{1/a} \in G$. Atunci conform punctului (a), avem $f \circ g = f_a \circ f_{1/a} = f_{a\cdot 1/a} = f_1 = 1_{\mathbb{R}}$. Similar, $g \circ f = f_{1/a} \circ f_a = f_{1/a\cdot a} = f_1 = 1_{\mathbb{R}}$.

(e) $1_{\mathbb{R}}(1) + 1_{\mathbb{R}}(2) + \ldots + 1_{\mathbb{R}}(100) = 1 + 2 + \ldots + 100 = \dfrac{100 \cdot 101}{2} = \boxed{5050}$

(f) Avem de fapt $h = f_2$. Atunci folosind punctul (a), obţinem

$$h \circ h \circ h = f_2 \circ f_2 \circ f_2 = f_{2\cdot 2\cdot 2} = \boxed{f_8}\,.$$

(g) Verificăm axiomele unui grup comutativ

- am văzut la punctul (a) că G este **parte stabilă** pentru compunerea funcţiilor
- compunerea funcţiilor este în general **asociativă**, deci în particular şi pe G
- $(G, \circ)$ are un **element neutru**, anume $1_{\mathbb{R}}$, conform (c)
- orice element al lui G are un **invers**, conform (d)
- pentru orice $f_a, f_b \in G$, conform (a) avem $f_a \circ f_b = f_{ab} = f_{ba} = f_b \circ f_a$, deci compunerea funcţiilor este **comutativă** pe G

In concluzie, $(G, \circ)$ este grup comutativ.

Observaţie. Cu notaţia introdusă la începutul rezolvării, este evident că funcţia $\phi : \mathbb{R}^* \to G$ definită prin $\phi(a) = f_a$ este bijectivă. În plus, tot din (a) rezultă că ϕ este morfism:

$$\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*\,.$$

Prin urmare G este un grup izomorf cu $(\mathbb{R}, \cdot)$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare. Va fi util să observăm că $f(x) = x^{-3}$, $\forall x > 0$.

(a) Pe intervalul $(0, \infty)$, avem

$$\int f(x)\,dx = \int x^{-3}\,dx = \boxed{-\frac{x^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C}$$

(b) Pentru orice $x > 0$, avem $f'(x) = -3x^{-4} = \boxed{-\dfrac{3}{x^4}}$

(c) Conform punctului (b), avem $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4} < 0$, pentru orice $x > 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(d) Cum funcţia f ia numai valori pozitive, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $a_{n+1} - a_n = f(n+1) > 0$, de unde rezultă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

(e) Fie $k > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2} &= \frac{(k+1)^2 - k^2}{2k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2} = \frac{(2k+1)(k+1)}{2k^2(k+1)^3} = \frac{2k^2+3k+1}{2k^2(k+1)^3} \\ &> \frac{2k^2}{2k^2(k+1)^3} = \frac{1}{(k+1)^3}.\end{aligned}$$

(f) Avem $a_4 = \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} = 1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{64} > 1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} = 1,15625 > 1,15$.
Cum şirul este strict crescător, pentru $n \geq 4$ avem $a_n \geq a_4 > 1,15$.

(g) Fie $n > 4$. Scriem inegalitatea de la punctul (e) pentru fiecare din valorile $k = 4, 5, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5^3} &< \frac{1}{2\cdot 4^2} - \frac{1}{2\cdot 5^2} \\ \frac{1}{6^3} &< \frac{1}{2\cdot 5^2} - \frac{1}{2\cdot 6^2} \\ \ldots &< \ldots \\ \frac{1}{n^3} &< \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}\end{aligned}$$

Adunând aceste inegalităţi şi reducând termenii asemenea, obţinem

$$\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2\cdot 4^2} - \frac{1}{2k^2} < \frac{1}{32}.$$

Atunci $a_n = a_4 + \dfrac{1}{5^3} + \dfrac{1}{6^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^3} < a_4 + \dfrac{1}{32} = 1,208912(037)4 < 1,21$.
Pentru $n \leq 4$, cum şirul este strict crescător, avem $a_n < a_5 < 1,21$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.