BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 49

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 49

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Punem condiţia ca coordonatele celor două puncte să satisfacă ecuaţia, obţinem sistemul în a şi b : $\begin{cases} 5+a\cdot 1+b &= 0 \\ 1+a\cdot 5+b &= 0 \end{cases}$

Scăzând din a doua ecuaţie pe prima obţinem $4a-4=0$, de unde $a=\boxed{1}$. Substituind în prima ecuaţie deducem $b=\boxed{-6}$.

(b) Cu formula distanţei, $d(A,C)=\sqrt{(5-1)^2+(1-5)^2}=\boxed{4\sqrt{2}}$.

(c) $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\boxed{\sqrt{2}}$

(d) $\sin\pi+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=0+1=\boxed{1}$

(e) Aria triunghiului este $\frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1&5&6\\1&2&2\\1&6&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&6\\0&-3&-4\\0&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-4\\1&-1\end{vmatrix}=$ $3+4=7$. Deci aria este $\boxed{\frac{7}{2}}$.

(f) Folosind formula sumei unei progresii geometrice de prim termen 1 şi raţie i, avem $1+i+i^2+\ldots+i^{11}=\frac{i^{12}-1}{i-1}=\frac{(i^2)^6-1}{i-1}=\frac{(-1)^6-1}{i-1}=\boxed{0}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Grupând convenabil, suma elementelor lui $\mathbb{Z}_{14}$ este $\hat{0}+(\hat{1}+\widehat{13})+(\hat{2}+\widehat{12})+(\hat{3}+\widehat{11})+(\hat{4}+\widehat{10})+(\hat{5}+\hat{9})+(\hat{6}+\hat{8})+\hat{7}$. Suma elementelor din fiecare paranteză este $\hat{0}$, deci suma căutată este $\boxed{\hat{7}}$.

(b) Submulţimile căutate sunt de forma $X=\{1,2\}\cup A$, unde A este orice submulţime a mulţimii $\{5,6\}$. Cum $\{5,6\}$ are 2 elemente, va avea 2^2 submulţimi, deci răspunsul este $\boxed{4}$.

(c) Fiecăreia din elementele 1 şi 2 i se pot asocia în mod independent 2 imagini posibile, deci avem $2\cdot 2=\boxed{4}$ funcţii posibile de tipul căutat.

(d) Rădăcinile raţionale ale polinomului dat sunt de forma $\frac{p}{q}$, unde p este un divizor al termenului liber 6, iar q este un divizor al coeficinetului dominant 1.

Deci q este în mod necesar ± 1, şi astfel vedem că orice rădăcină raţională a polinomului trebuie de fapt să fie un număr întreg, divizor al lui 6. Divizorii lui 6 sunt $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Incercăm pe rând aceste valori.

$$\begin{aligned} 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 + 6 &= 24 \neq 0 \\ (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 11 \cdot (-1) + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Suntem norocoşi ca a doua valoare încercată să fie rădăcina $x_1 = -1$. Am fi putut fi mai norocoşi dacă observam că, având coeficienţi pozitivi, polinomul nu poate avea rădăcini pozitive.

Cum polinomul are rădăcina $x_1 = \boxed{-1}$, conform teoremei lui Bézout, se divide prin $x - (-1) = x + 1$. Aranjând convenabil, vedem că polinomul se poate scrie $x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6 = (x+1)(x^2 + 5x + 6)$. Nu mai rămâne decât să rezolvăm ecuaţia pătratică $x^2 + 5x + 6 = 0$ pentru a afla si celelalte două rădăcini ale polinomului dat. Acestea vor fi $x_2 = \boxed{-2}$, $x_3 = \boxed{-3}$.

(e) Evident pentru $n \geq 1$ avem $n^2 + 5n - 6 \geq 1^2 + 5 \cdot 1 - 6 = 0$, deci toate elementele mulţimii satisfac inegalitatea. Probabilitatea căutată este atunci $p = \frac{5}{5} = \boxed{1}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \boxed{5x^4 - 15x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{5}{4} = \boxed{-\frac{13}{12}}$

(c) Derivata $f'(x) = 5x^2(x^2 - 3)$ are rădăcinile $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ şi $x_3 = \sqrt{3}$. Cum $5x^2 \geq 0$ semnul derivatei este dat de $x^2 - 3$, deci $f'(x) \geq 0$ pe intervalele $(-\infty, -\sqrt{3}]$ şi $[\sqrt{3}, \infty)$ şi $f'(x) \leq 0$ pe intervalul $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Funcţia f are atunci un maxim local în $-\sqrt{3}$ şi un minim local în $x = \sqrt{3}$. In concluzie f are $\boxed{2}$ puncte de extrem local.

(d) Calculăm a doua derivată $f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3)$. Aceasta are rădăcinile $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$ şi $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. In fiecare din aceste puncte f'' are schimbare de semn, deci toate $\boxed{3}$ sunt puncte de inflexiune.

(e) Dând factor comun forţat $\sqrt{n}$, atât la numitor cât şi la numărator,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n} + 4}{5\sqrt{n} + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{4}{\sqrt{n}}}{5 + \frac{6}{\sqrt{n}}} = \frac{3+0}{5+0} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Dacă elementele lui A sunt din mulţimea $\{-1, 1\}$, atunci şi elementele lui $-A$ sunt tot din aceaşi mulţime, deci $-A \in M$.

(b) Pentru fiecare din cele 9 elemente ale unei matrice din M avem 2 posibilităţi de alegere a valorii sale (anume 1 sau -1), deci mulţimea M posedă $\boxed{2^9 = 512}$ elemente.

(c) Fie $A \in M$. Inmulţind oricare linie cu -1, determinantul lui A îşi schimbă doar semnul. Astfel putem presupune fără a restrânge generalitatea că avem de studiat un determinant de forma $\begin{vmatrix} 1 & \pm1 & \pm1 \\ 1 & \pm1 & \pm1 \\ 1 & \pm1 & \pm1 \end{vmatrix}$. Valoarea absolută a unui asemenea determinant poate fi văzut ca dublul ariei unui triunghi ce are ca vârfuri 3 dintre punctele de coordonate $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$. Să observăm că aceste puncte formează un pătrat. Dacă cel puţin două dintre punctele alese au aceleaşi coordonate, atunci determinantul este 0. Dacă toate cele trei puncte sunt distincte avem un triunghi ce este o jumătate de pătrat cu latura 2, deci are aria $\dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$. Determinantul este atunci $2 \cdot (\pm2) = \pm4$. In toate cazurile, determinantul se divide la 4, qed.

(d) **Prima rezolvare.** Să observăm că am demonstrat deja mai sus că determinantul poate lua doar valorile $-4, 0, 4$.
A doua rezolvare. Fie $A \in M$. Ştim de la (c) că $\det A$ se divide la 4. Dar dezvoltând determinantul cu formula lui Sarrus obţinem o sumă de 6 termeni toţi fiind -1 sau 1. Astfel determinantul este cuprins între -6 şi 6, iar singurele numere divizibile cu 4 în acest interval sunt $-4, 0, 4$.

(e) **Prima rezolvare** Procedăm prin redcucere la absurd. Fie $B \in M$ inversabilă astfel ca $B^{-1} \in M$. Atunci $\det B$ poate fi doar ±4. Avem $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} B^*$. Dar elementele lui B^* sunt de forma $\pm \begin{vmatrix} \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 \end{vmatrix}$, deci pot lua doar valorile $-2, 0, 2$. Ca să fie divizibile cu ±4 (determinantul din faţa matricei B^*), trebuie ca toate elementele lui B^* să fie 0. Dar atunci $B^{-1} = O_2$, contradicţie.
A doua rezolvare Demonstrăm o lemă pe care o vom folosi şi la (g).
Lemă. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sunt matrice cu toate elementele numere impare, atunci matricea $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ are toate elementele numere întregi impare.
Demonstraţie: Fie $C = AB$. Atunci $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$. Fiecare din termenii sumei este un produs de numere impare. Deci avem o sumă de 3 numere impare, care este evident tot număr impar.
Revenim la demonstraţia acestui punct. Procedăm prin reducere la absurd şi presupunem că există $A \in M$ astfel ca $A^{-1} \in M$. Conform lemei precedente, cum A şi A^{-1} au numai elemente ±1, $A \cdot A^{-1}$ va avea toate elementele numere impare. Contradicţie, deoarece $A \cdot A^{-1} = I_2$ are 6 elemente egale cu 0, care nu este impar.

(f) Ne poate fi de folos reprezentarea geometrică de la rezolvarea subpunctului (c). Este suficient să luăm 3 puncte din plan distincte, dintre $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Determinantul corespunzător va fi ± 4. Dacă este egal cu -4, permutând două linii, obţinem un nou determinant, de data aceasta egal cu 4. Alegem deci aleator punctele de coordonate $(-1,1)$, $(1,1)$ şi $(1,-1)$. Determinantul corespunzător este $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$. Schimbându-i primele două linii obţinem derteminantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$. Astfel, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este exemplul căutat.

(g) Folosind repetat (de 2006 ori mai exact) lema din rezolvarea subpunctului (e), deducem că toate elementele matricei A^{2007} sunt impare, deci nu pot fi nule.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = t\Big|_0^x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \boxed{\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(c) Avem $f_1(x) + f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x(2+x) = 0 \Leftrightarrow x \in \boxed{\{-2, 0\}}$

(d) Folosind (e) (da!! iarăşi s-au inversat subpunctele!!) avem $f_n(1) = \frac{1}{n!}$. Trecând la limită în $0 < f_n(1) \le \frac{1}{n}$ şi folosind criteriul cleştelui, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \boxed{0}.$$

(e) Fie $P(n)\ :\ f_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrăm prin inducţie că $P(n)$ este satisfăcută pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Verificarea: Pentru $n = 1$ am văzut la (a) că $f_1(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Pasul de inducţie: Presupunem că $P(n)$ este adevărată. Atunci

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt = \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt = \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Conform principiului inducţiei, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Nu avem nevoie de nici un calcul! Conform teoremei Leibnitz-Newton, acest punct este o consecinţă directă a definiţiei

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

(g) Folosind (e) ecuaţia din enunţ se scrie $x\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)=0$. Evident ecuaţia are soluţia $x_1=0$. Rămâne să studiem numărul de rădăcini reale ale funcţiei polinomiale $g(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}$. Fiind o funcţie polinomială de grad impar, ştim că g are o rădăcină. Avem $g'(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{8}=\frac{3x^2+8x+12}{24}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ căci discriminantul funcţiei pătratice $3x^2+8x+12$ este $\Delta=8^2-4\cdot3\cdot12=-80<0$. Deci g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi astfel ecuaţia $g(x)=0$ are o rădăcină unică. In concluzie ecuaţia din enunţ are $\boxed{2}$ rădăcini reale.