BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 48

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 48

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a)

$$|AB| = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \boxed{5}, \quad |AC| = \sqrt{(5-2)^2 + (-3-1)^2} = \boxed{5}$$

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (4\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j}) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = \boxed{0}$.

(c) Deoarece am văzut mai sus că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, cei doi vectori sunt ortogonali, adică $m(\hat{A}) = 90°$.

(d) Vectorul de poziţie al punctului C', simetricul lui C faţă de B, este $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = 7\vec{i} + 11\vec{j}$. Punctul C' căutat are coordonatele $(7, 11)$.

(e) Folosim identitatea $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, valabilă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. E clar că $\sin 15° > 0$, deci

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

Expresia se poate simplifica încă puţin, dar n-avem de unde să ştim în condiţii de examen. De altfel, am calculat ce ni s-a cerut? Am calculat!

(f)

$$\left|\frac{3-4i}{-4+3i}\right| = \frac{|3-4i|}{|-4+3i|} = \frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \boxed{1}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\lg 1000 = 3 \in \mathbb{N}$.

(b) Raţia progresiei este $r = 17 - 12 = 5$. Atunci $a_1 = 12 - 2r = 12 - 10 = \boxed{2}$.

(c) După cum ni se prezintă enunţul, trebuie doar să verificăm identitatea. Cel mai simplu e să pornim cu expresia din dreapta. Avem

$$(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = x^4 + x^2 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(d) $(2+x)^4 = \ldots + C_4^1 2^1 x^3 + \ldots$. Coeficientul căutat este $C_4^1 \cdot 2 = \boxed{8}$.

(e) Folosind identitatea de la (c) constatăm că g divide polinomul f. Restul împărţirii lui f la g este 0.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) + \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \boxed{1}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(b) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x = 1$, adică $\boxed{f'(1) = 0}$.

(c) Cu teorema Leibnitz–Newton obţinem

$$\int_1^2 f''(x)\,dx = f'(2) - f'(1) = 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

(d) Un punct $A(2, \alpha)$ aparţine graficului funcţiei f facă şi numai dacă $\alpha = f(2) = \boxed{\frac{5}{2}}$.

(e) Fie $x > 0$. Atunci

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + x = f(x),$$

q.e.d.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) I_2 este elementul neutru din $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, deci $I_2^2 = I_2$.

(b) Verificăm că $A \in G$. Avem $A^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. În mod analog verificăm şi faptul că $B \in G$: $B^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. De altfel, ultima verificare rezultă automat observând că $B = A^T$.

(c) Avem

$$AB = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix},$$

deci într-adevăr $AB \neq BA$.

(d) Evident $X = A^{-1}$. Folosind punctul (b) rezultă $X = A^{-1} = \boxed{A}$.
Ce se întâmplă dacă nu observăm acest fapt? Nimic, doar că avem puţin mai mult de lucru. Calculăm $\det A = \hat{2}$, $\hat{2}^{-1} = \hat{2}$, matricea transpusă $A^T = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} \hat{2} & -\hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi în sfârşit,

$$A^{-1} = \hat{2}\begin{pmatrix} \hat{2} & -\hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}}$$

(e) **Soluţia directă.** Avem $(AB)^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} = \hat{2}I_2 \neq I_2$.

O soluţie fără calcule. Ambele matrici sunt inversabile, având determinanţii egali cu $\hat{2} \neq \hat{0}$. Următoarele propoziţii sunt echivalente:

$$AB \in G \;\Leftrightarrow\; (AB)^2 = I_2 \;\Leftrightarrow\; A(BA)B = I_2 \;\Leftrightarrow\; A^2(BA)B^2 = B \cdot I_2 \cdot A \;\Leftrightarrow\; BA = AB$$

Or, am văzut la punctul (c) că ultima propoziţie este falsă.

(f) Fie $C = AB$. Am văzut că $C^2 = \hat{2}I_2$. Atunci $C^3 = \hat{2}C \neq I_2$ deoarece $C \neq \hat{2}I_2$. În cele din urmă $C^4 = (\hat{2}I_2)^2 = I_2$. Numărul căutat (ordinul elementului AB în grup) este aşadar egal cu 4.

(g) Combinând punctele precedente obţinem mulţimea

$$\{I_2, A, B, ABA, BAB, ABAB\} \subset G$$

care are **şase elemente.** Într-adevăr, ştim că $I_2^2 = A^2 = B^2 = I_2$. De asemenea $(ABAB)^2 = (AB)^4 = I_2$, deci şi $(BABA)^2 = I_2$. În sfârşit, $(ABA)^2 = ABAABA = ABBA = AA = I_2$ şi în mod similar $(BAB)^2 = I_2$. Elementele sunt distincte două câte două! Într-adevăr, presupunând prin absurd că pentru două dintre elementele enumerate avem $x = y$, rezultă $xy = y^2 = I_2$. După ce efectuăm toate simplificările (fie $A^2 = I_2$ fie $B^2 = I_2$) obţinem o egalitate de forma $A = I_2$ sau $B = I_2$ sau $(AB)^n = I_3$ cu $n \leq 3$, absurd! De exemplu: din $ABA = BAB$ obtinem $ABABAB = I_2$, sau $(AB)^3 = I_2$. Din $ABA = BABA$ obţinem $B = I_2$.

Întrebare. Oare cei de la ABBA de aici şi-au găsit numele?

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Asimptota verticală a funcţiei f este dreapta $x = -1$. Într-adevăr,

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = \infty$$

(b) Asimptota spre ∞ este dreapta $y = 0$, deoarece $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

(c) Avem

$$f(x) - 1 + x - x^2 = -\frac{x^3}{1+x} \leq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

(d) Ca mai sus,

$$f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 = \frac{x^4}{1+x} \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

(e) Cele două inegalităţi rezultă direct din propoziţiile demonstrate la (c) şi (d).

(f) Înlocuind pe x cu x^9 la punctul precedent obţinem exact ceea ce trebuia demonstrat.

(g) Aria cu pricina este integrala funcţiei (pozitive) pe intervalul $[0,1]$. Integrând inegalităţile de la (f) obţinem

$$\int_0^1 (1 - x^9 + x^{18} - x^{27})\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^9}\,dx \le \int_0^1 (1 - x^9 + x^{18},$$

adică

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{19} - \frac{1}{28} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^9}\,dx \le 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{19}$$

Restul calculelor sunt pentru clasa a patra, însă sunt oribile fără calculator.