BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 46

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 46

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Conjugatul unui număr complex se obţine schimbând semnul în faţa lui i. Conjugatul lui $2007i$ va fi deci $\boxed{-2007i}$.

(b) Aria triunghiului ABC este $S = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 48 - 48 - 48 = -48$.
Aria va fi deci $\boxed{S = 24}$.

(c) Notăm cu a lungimea ipotenuzei, cu b şi c lungimile catetelor şi cu h lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei. În cazul nostru avem $b = 6$, $c = 8$. Pentru calculul lui a utilizăm teorema lui Pitagora:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Pentru h avem formula

$$h = \frac{bc}{a} = \frac{48}{10} = \boxed{\tfrac{24}{5}}$$

(d) Folosind faptul că modulul unui raport este egal cu raportul modulelor, obţinem

$$|z| = \left|\frac{3+i}{3-i}\right| = \frac{|3+i|}{|3-i|} = \frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{9+1}} = \boxed{1}$$

(e) Deoarece funcţia $\sin$ este periodică de perioadă principală 2π, vom avea

$$\sin\frac{9\pi}{4} = \sin\left(\frac{9\pi}{4} - 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Deci

$$\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{0}$$

(f) Punctul A aparţine hiperbolei deoarece coordonatele sale verifică ecuaţia hiperbolei, adică

$$(-1)^2 - \frac{0^2}{2} = 1$$

Ecuaţia tangentei la hiperbolă într-un punct A de pe hiperbola se obţine prin dedublare înlocuind x^2 cu $x \cdot x_A$ şi y^2 cu $y \cdot y_A$. Avem astfel

$$x \cdot (-1) - \frac{y \cdot 0}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Ecuaţia se scrie $3^{x^2+x} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$. Discriminantul ecuaţiei de gradul doi este $\Delta = 1 + 8 = 9$. Soluţiile vor fi atunci $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, adică

$$\boxed{x_1 = -2, x_2 = 1}$$

(b) Prin definiţia combinărilor, numărul posibil de alegeri este

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = \boxed{10}$$

(c) Utilizând formulele

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

obţinem

$$\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18 = \log_2 \frac{3 \cdot 48}{18} = \log_2 8 = \boxed{3}$$

(d) Restul împărţirii unui polinom f la $x - a$ este $f(a)$. În cazul nostru restul împărţirii lui f la $x - 1$ este $f(1) = \boxed{0}$.

(e) Pentru ca un număr x să fie termen al unui şir (a_n) trebuie să existe $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n = x$. Facem această probă pentru fiecare dintre numerele date.

$$\begin{aligned} 2n - 7 = -3 \quad &\Leftrightarrow \quad n = 2 \Rightarrow a_2 = -3 \\ 2n - 7 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad n = 4 \Rightarrow a_4 = 1 \\ 2n - 7 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad n = \frac{11}{2} \notin \mathbb{N} \\ 2n - 7 = 6 \quad &\Leftrightarrow \quad n = \frac{13}{2} \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Din cele 4 numere doar două sunt termeni ai şirului (a_n). Probabilitatea cerută este deci $\frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Prin calcul direct, pentru orice x real, obţinem

$$f(-x) = (-x)^{2007} + (-x) = -x^{2007} - x = -(x^{2007} + x) = -f(x)$$

(b) Pentru orice x real avem $f'(x) = \boxed{2007x^{2006} + 1}$.

(c) Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x^{2006}+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x^{2006} + 1) = \boxed{1}$.

(d) Cum $f'(x) = 2007x^{2006} + 1 \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) **Prima rezolvare:** Vom utiliza următorul rezultat:

Pentru o funcţie f continuă pe intervalul $[-a, a]$ şi impară (adică $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a, a]$) avem $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

Cum f are aceste proprietăţi pe intervalul $[-1, 1]$, va rezulta că integrala cerută este $\boxed{0}$.

A doua rezolvare: Prin calcul direct

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \left(\frac{x^{2008}}{2008} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2008} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} - \frac{1}{2} = \boxed{0}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Două matrici sunt egale dacă au aceleaşi elemente. Deci

$$A(x) = A(y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y-1 & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y$$

(b) Fie $x, y > 0$. Prin calcul direct

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y-1 & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1+xy-x & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xy-1 & xy \end{pmatrix} = A(xy) \end{aligned}$$

(c) Fie $x, y > 0$. Cum $xy = yx$, conform punctului precedent

$$A(x)A(y) = A(xy) = A(yx) = A(y)A(x)$$

(d) Datorită relaţiei de la punctul (b), nu este greu de ”ghicit” că $\boxed{e = 1}$. Să verificăm :

$$A(x)A(1) = A(x \cdot 1) = A(x), \forall x > 0$$

$$A(1)A(x) = A(1 \cdot x) = A(x), \forall x > 0$$

(e) Tot datorită relaţiei de la (b), bănuim că $\boxed{x' = \frac{1}{x}} > 0$. Verificare:

$$A(x)A\left(\frac{1}{x}\right) = A\left(\frac{1}{x}\right)A(x) = A\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = A(1), \forall x > 0$$

(f) Notăm $P(n): \ A^n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^n - 1 & x^n \end{pmatrix} = A(x^n)$.

Pentru prima valoare posibilă a lui n, evident $P(1): A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$ este adevărată.

Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm că $P(n+1): A^{n+1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{n+1} - 1 & x^{n+1} \end{pmatrix} = A(x^{n+1})$ este adevărată. Folosind punctul (b), avem

$$A^{n+1}(x) = A^n(x)A(x) = A(x^n)A(x) = A(x^n x) = A(x^{n+1})$$

Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Vom utiliza următorul rezultat :

O funcţie $f : A \to B$ este bijectivă dacă şi numai dacă pentru orice y din B există şi este unic x în A astfel încât $f(x) = y$.

Fie $y \in (0, \infty)$. Vrem să arătăm că există o unică matrice $A(x) \in M$ astfel încât $f(A(x)) = y$. Este clar că vom lua $x = y$, obţinând astfel existenţa şi unicitatea lui $A(x)$. Deci f este bijectivă. In plus, folosind punctul (b), avem

$$f(A(x)A(y)) = f(A(xy)) = xy = f(A(x))f(A(y))$$

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Avem $f(0) = \frac{0}{1+0} = \boxed{0}$ şi $g(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = \boxed{0}$.

(b) Pentru orice x real avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ g'(x) &= \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} = 2f(x) \end{aligned}$$

(c) Punctele critice ale lui f sunt soluţiile ecuaţiei $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$, adică $x = \pm 1$. Cum f' schimbă semnul în aceste puncte, rezultă că $\boxed{x = \pm 1}$ sunt puncte de extrem local ale lui f.

Ecuaţia $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ ne dă punctul critic $x = 0$ al lui g. Deoarece g' schimbă semnul în acest punct, rezultă că $\boxed{x = 0}$ este punct de extrem local pentru g.

(d) Avem $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, deoarece gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului. Astfel, $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ pentru graficul lui f.

(e) Pentru orice $x \leq 0$ avem $1 + x^2 > 0$, deci $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq 0$.

De asemenea, pentru orice $x \leq 0$ avem $x^2 \geq 0$, deci $g(x) = \ln(1 + x^2) \geq \ln 1 = 0$.

Comentariu : La punctele ce urmează se cere să se demonstreze că un număr negativ este mai mic decât un număr pozitiv.

(f) Conform punctului precedent, membrul stâng al inegalităţii este negativ, iar cel drept pozitiv, inegalitatea fiind evident adevărată.

(g) In partea stângă avem o integrală dintr-o funcţie pozitivă pe domeniul de integrare, deci pozitivă , iar în membrul drept un număr negativ.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.