BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 44

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 44

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$ este $\sqrt{(0-4)^2+(-3-0)^2} = \boxed{5}$

(b) Dreapta AB este verticală (desenaţi punctele şi vă convingeţi). O altă dreaptă verticală şi deci paralelă cu AB este axa $\boxed{Oy}$ a cărei ecuaţie este $\boxed{x=0}$.

(c) Calculăm lungimile laturilor. Am văzut la punctul (a) că $AC = 5$. Este uşor de văzut că $AB = 3$ (nu este nevoie de formula, avem două puncte pe o dreaptă verticală) şi $BC = 4$ (puncte pe o dreaptă orizontală). Perimetrul este deci $AB + AC + BC = \boxed{12}$.

(d) Coordonatele centrului de greutate sunt mediile aritmetice ale coordonatelor celor 3 puncte, adică

$$\left(\frac{4+4+0}{3}, \frac{0+(-3)+(-3)}{3}\right) = \boxed{\left(\frac{8}{3}, -2\right)}$$

(e) Din calculele precedente observăm că $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic. Atunci

$$\cos\widehat{CAB} = \frac{AB}{AC} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

(f) Intr-un triunghi dreptunghic, lungimea razei cercului circumscris este jumătate din lungimea ipotenuzei, adică $\frac{AC}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Cum ordinea cifrelor este importantă, avem $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = \boxed{12}$ numere posibile.

(b) Raţia progresiei este $a_2 - a_1 = -1-1 = 2$, iar $a_{10} = a_1 + 9r = 1 + 9\cdot(-2) = \boxed{-17}$.

(c) $C_9^2 + C_9^7 = \frac{9!}{2!\cdot 7!} + \frac{9!}{7!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 9}{2} + \frac{8\cdot 9}{2} = \boxed{72}$.

(d) $f(1+i) = (1+i)^2 - 2i = 1 + 2i + i^2 - 2i = 1 + 2i - 1 - 2i = \boxed{0}$.

(e) Inecuaţia se poate scrie $2^x < 1024 \Leftrightarrow 2^x < 10 \Leftrightarrow x < 10$. Cum exact 3 din cele 5 elemente ale muţimii satisfac condiţia, probabilitatea este $\boxed{\frac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Funcţia este periodică de perioadă 2π, de unde afirmaţia din enunţ.
Comenatriu: Nu avem nimic de făcut altceva decât să menţionăm cuvântul magic "periodică". Aceasta este un din proprietăţile cele mai importante ale funcţiei sinus şi ar trebui să fie cel puţin la fel de cunoscută ca formula folosită îindicaţiile oficiale.

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{\cos x}$.

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este egală cu $f'(\pi) = \cos\pi = \boxed{-1}$.

(d) Pe intervalul $(0, 2\pi)$ funcţia $f(x) = \sin x$ are un maxim în $x = \frac{\pi}{2}$ şi un minim în $x = \frac{3\pi}{2}$, deci $\boxed{2}$ puncte de extrem.
Comentariu: Nu este nevoie să studiem derivata. Graficul funcţiei sinus ar trebui să fie cel puţin la fel de bine cunoscut ca semnul derivatei unei funcţii.

(e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = (-\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos(-\pi)) = -(-1) + (-1) = \boxed{0}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Cum I_2 este element neutru la înmulţirea matricelor, avem

$$I_2^2 = I_2 \Rightarrow I_2 \in G$$

(b) Prin calcul direct

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2}\cdot\hat{2} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow A \in G \\ B^2 &= \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1}+\hat{2} & \hat{2}\cdot\hat{2} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow B \in G \end{aligned}$$

▼[detalii]
Am folosit faptul că în Z_3, avem $\hat{4} = \hat{1}$ şi $\hat{3} = \hat{0}$.

(c) Prin calcul direct avem

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şi este acum evident că $AB \neq BA$.

(d) Prin calcul direct $(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, deci $(AB)^2 \neq I_2 \Rightarrow AB \neq G$.

(e) Am văzut la punctul (b) că matricea A este inversabilă cu inversa $A^{-1} = A$. Atunci $AX = I_2 \Leftrightarrow X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}I_2 = A^{-1} = \boxed{A}$.

(f) Evident $(AB)^1 \neq I_2$ şi am văzut la punctul (d) că $(AB)^2 \neq I_2$. Incercăm mai departe şi calculăm $(AB)^3 = (AB)^2(AB) = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1}+\hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} = I_2$. Deci cel mic mic nenul n cu proprietatea cerută este $\boxed{3}$.

(g) Ştim deja de la punctele (a) şi (b) că $I_2, A, B \in G$. Mai avem

$$\begin{aligned}
(-\hat{1}\cdot A)^2 &= A^2 = I_2 \Rightarrow -\hat{1}\cdot A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G \\
(-\hat{1}\cdot B)^2 &= B^2 = I_2 \Rightarrow -\hat{1}\cdot B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} \in G \\
(-\hat{1}\cdot I_2)^2 &= I_2^2 = I_2 \Rightarrow -\hat{1}\cdot I_2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} \in G
\end{aligned}$$

Toate aceste matrice listate mai sus sunt distincte. Deci am găsit 6 matrice cu proprietatea cerută.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Fie $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$. Avem $f(x)-1+\frac{1}{3}\left(\frac{10}{x+3}-\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2+3x}-1+\frac{1}{3}\cdot\frac{10x-x-3}{x(x+3)} = \frac{x^2+1}{x^2+3x}-1+\frac{3x-1}{x^2+3x} = \boxed{0}$. De aici deducem

$$f(x) = 1 - \frac{10}{3(x+3)} + \frac{1}{3x}\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$$

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$, folosind punctul precedent, avem

$$f'(x) = \boxed{\frac{10}{3(x+3)^2} - \frac{1}{3x^2} = \frac{3x^2-2x-3}{x^2(x+3)^2}}.$$

(c) Deoarece, folosind forma lui f din enunţ, avem de exemplu

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3_+} f(x) &= \frac{3^2+1}{0_-} = -\infty \\
\lim_{x\to 0_+} f(x) &= \frac{0^2+1}{0_+} = \infty
\end{aligned}$$

rezultă că dreptele $x = -3$ şi $x = 0$ sunt asimptote verticale ale graficului funcţiei f.

(d) Punctele de extrem local ale lui f corespund valorilor lui x pentru care derivata f' se anulează şi îşi schimbă semnul. Ori acestea sunt valorile lui x pentru care expresia $3x^2 - 2x - 3$ de la numărătorul lui $f'(x)$ se anulează şi îşi schimbă semnul. Cum discriminantul acestei expresii de gradul doi este $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 40 > 0$, aceste două puncte sunt $\frac{2 \pm \sqrt{40}}{6}$, amândouă fiind în domeniul de definiţie al funcţiei f. Rezultă că f are exact $\boxed{2}$ puncte de extrem local.

(e) Folosind punctul (a), pe intervalul $(0, \infty)$ avem

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int \left(1 - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \boxed{x - \frac{10}{3} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln x + C} \end{aligned}$$

(f) Avem un caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Folosim regula lui l'Hopital :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{0}.$$

(g) Folosind punctul (e) pentru calculul integralei şi apoi folosind punctul precedent în calculul limitelor, avem

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^n f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(n - 1 - \frac{10}{3} \ln \frac{n+3}{4} + \frac{1}{3} \ln n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{10}{3} \cdot \frac{n+3}{4n} \cdot \frac{\ln \frac{n+3}{4}}{\frac{n+3}{4}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln n}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \boxed{1}. \end{aligned}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.