BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 43

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 43

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Coordonatele punctelor A şi B satisfac ecuaţia dreptei deci a, b sunt soluţiile sistemului $\begin{cases} a\cdot 1 + b\cdot 1 - 2 &= 0 \\ a\cdot 2 + b\cdot 0 - 2 &= 0 \end{cases}$ Din a doua ecuaţie obţinem $a = \boxed{1}$ şi substituind în prima avem $b = \boxed{1}$.

(b) Cum pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geq 0$, folosind formula fundamentală a trigonometriei avem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

(c) Aria triunghiului este $\dfrac{AB\cdot AC \sin \hat{A}}{2} = \dfrac{8\cdot 6\cdot \frac{1}{2}}{2} = \boxed{12}$.

(d) $\overline{-2+2i} = \boxed{-2-2i}$.

(e) Cum $z = \dfrac{1+2i+i^2}{1-i} = \dfrac{2i}{1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2(i+i^2)}{1-i^2} = \dfrac{2}{i-1}2 = i-1$, avem

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

(f) Panta dreptei este $m = 1$, deci ecuaţia ei este $y - 1 = 1\cdot(x - (-2))$, sau

$$\boxed{y - 1 = x + 2}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Cum $x * 0 = 0 * x = x + 0 - x\cdot 0 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, elementul neutru al legii $*$ este $\boxed{0}$.

(b) $\log_3 \dfrac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = \log_3(3^4) - \log_3(3^{\frac{1}{2}}) = 4 - \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{7}{2}}$.

(c) Fie a_1 primul termen, iar r raţia progresiei. Din ipoteză

$$\begin{cases} a_3 &= a_1 + 2r &= 1 \\ a_7 &= a_1 + 6r &= 9 \end{cases}$$

Scăzând prima ecuaţie din cea de a doua, avem $4r = 8$, deci $r = 2$. Substituind în prima ecuaţie, deducem $a_1 = \boxed{-3}$.

(d) Verificăm succesiv

$$\begin{aligned} 1^2 - 5\cdot 1 + 6 &= 2 \neq 0 \\ 2^2 - 5\cdot 2 + 6 &= 0 \\ 3^2 - 5\cdot 3 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaţia din enunţ este aşadar verificată de două numere din mulţimea $\{1, 2, 3\}$.

Probabilitatea este $\boxed{p = \frac{2}{3}}$.

(e) Conform relaţilor lui Viète

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{-3}{1} = \boxed{3} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{1}{1} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Fie $\phi : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \frac{e^x}{x+2}$. Funcţia ϕ este derivabilă pe tot domeniul de definiţie şi $\phi(x) = \frac{(e^x)'(x+2) - e^x(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$. Evident, $\phi(x) = f(x)$ pentru orice $x \geq 0$. Atunci $\boxed{f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}, \forall x > 0}$ şi $\boxed{f'_d(0)} = \phi'_d(0) = \phi'(0) = \frac{e^0(0+1)}{(0+2)^2} = \boxed{\frac{1}{4}}$. Tot acest chin se datorează faptului că funcţia f este definită pe $[0, \infty)$, deci derivata ei în $x = 0$ trebuie înţeleasă în sensul derivatei laterale.

(b) Din definiţia derivatei, limita este $f'(1) = \frac{e^1(1+1)}{(1+2)^2} = \boxed{\frac{2e}{9}}$.

(c) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) > 0$, deci funcţia f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ şi nu are nici un punct de extrem.

(d) $\lim_{n\to\infty} nf(n) = \lim_{n\to\infty} e^n \frac{n}{n+2} = \infty \cdot 1 = \boxed{\infty}$.

(e) $\int_0^1 f(x)(x+2)dx = \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = \boxed{e-1}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Două matrice sunt egale dacă şi numai dacă toate elementele corespunzătoare sunt egale. De aici, $A_x = A_y \Leftrightarrow x = y$.

(b) Fie $x, y \in \mathbb{Z}$. Atunci $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y} \in M$, deoarece suma a două numere întregi este număr întreg.

(c) Conform (b), $A_x \cdot A_0 = A_x, \forall x \in \mathbb{Z}$, deci $e = 0$ satisface condiţia cerută.

(d) Fie $x \in \mathbb{Z}$. Conform (b), $A_x \cdot A_{-x} = A_{x-x} = A_0 = A_e, \forall x \in \mathbb{Z}$, deci A_{-x} este acel A_a căutat.

(e) Aplicând repetat punctul (b), avem $(A_2)^n = A_{\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n-ori}} = A_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Injectivitatea a fost demonstrată la (a). Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, $A_x \in M$, deci f este şi surjectivă. In plus, conform (b)

$$f(A_x \cdot A_y) = f(A_{x+y}) = x + y = f(A_x) + f(A_y)\,.$$

(g) Aplicând repetat punctul (b), avem $(A_1)^n = A_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $A_1 + A_1^2 + \ldots + A_1^{2007} = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{2007} = \begin{pmatrix} 2007 & 1+2+\ldots+2007 \\ 0 & 2007 \end{pmatrix}$.

Deci $\det(A_1 + A_1^2 + \ldots + A_1^{2007}) = \boxed{2007^2}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = -e^{-x}(2x+3) + e^{-x} \cdot 2 = \boxed{-e^{-x}(2x+1)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(b) Cum $e^{-x} > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, semnul derivatei funcţiei f coincide cu semnul lui $-(2x+1)$. Atunci

- pentru $x < -\frac{1}{2}$, avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, -\frac{1}{2}]$
- pentru $x > -\frac{1}{2}$, avem $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[-\frac{1}{2}, \infty)$

(c) Folosind teorema lui l'Hopital, avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Deci graficul funcţiei f are asimptota orizontală $\boxed{y = 0}$ către $+\infty$.

(d) Integrând prin părţi,

$$\begin{aligned} \int e^{-x}(2x+3)dx &= \int (-e^{-x})'(2x+3)dx \\ &= -e^{-x}(2x+3) - \int (-e^{-x})(2x+3)'dx \\ &= -e^{-x}(2x+3) + \int 2e^{-x}dx \\ &= -e^{-x}(2x+3) - 2e^{-x} + C \\ &= \boxed{-e^{-x}(2x+5) + C} \end{aligned}$$

(e) Pentru $x \in [0, a]$, funcţia f este pozitivă (pe româneşte: graficul funcţiei f este “deasupra” axei Ox), deci aria căutată este

$$S(a) = \int_0^a f(x)dx = [-e^{-x}(2x+5)]\Big|_0^a = \boxed{5 - e^{-a}(2a+5)}.$$

Am folosit punctul (d).

(f) $\lim\limits_{a\to\infty} S(a) = \lim\limits_{a\to\infty}\left(5 - \frac{2a+5}{e^a}\right) = \boxed{5}$. ▼[detalii]

Cf. teoremei lui l’Hopital $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{2a+5}{e^a} = \lim\limits_{a\to\infty} \frac{2}{e^a} = 0$.

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\frac{2x+3}{x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x}\right) = 0 \cdot 2 = \boxed{0}$.