BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 40

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 40

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Folosind imparitatea funcţiei sinus, obţinem

$$\sin 1 + \sin -1 = \sin 1 - \sin 1 = \boxed{0}$$

(b) Vom folosi pentru aria triunghiului ABC formula

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}$$

Avem atunci

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{20\sqrt{3}}$$

(c) Distanţa dintre cele două puncte este

$$d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

(d) Condiţia de paralelism se scrie $\frac{1}{\alpha} = \frac{-2}{4}$ de unde obţinem

$$\boxed{\alpha = -2}$$

(e) Punctul A aparţine cercului dat în cazul în care coordonatele sale verifică ecuaţia cercului. Înlocuim deci x cu 2 şi y cu 1. Avem $2^2 + 1^2 = 5 \Leftrightarrow 4 + 1 = 5$, relaţie adevărată. Deci A se află pe cercul dat.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Înlocuim în expresiile lui f şi g x cu -1. Obţinem

$$f(-1) + g(-1) = -1 + 1 - 4 + 4 + 1 - 2 + 2 = \boxed{1}$$

(b) Împărţind polinomul f la g obţinem $f = (x-1)g + 4x + 6$. Câtul este deci $\boxed{x-1}$.

(c) Pentru un polinom de gradul 3, $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, prima relaţie a lui Viète este $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$. Deci în cazul nostru

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{1} = \boxed{-1}$$

(d) Pentru a calcula $S = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$, vom utiliza formula

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

precum şi relaţiile lui Viète. Avem astfel

$$\begin{aligned} S &= g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) \\ &= (x_1^2 + 2x_1 + 2) + (x_2^2 + 2x_2 + 2) + (x_3^2 + 2x_3 + 2) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 6 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 6 \\ &= (-1)^2 - 2 \cdot 4 + 2(-1) + 6 = 1 - 8 - 2 + 6 = \boxed{-3} \end{aligned}$$

(e) Vom rezolva ecuaţia $x^2 + 2x + 2 = 0$. Deoarece discriminantul ecuaţiei $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$ este negativ, soluţiile ecuaţiei nu sunt reale. Îl vom scrie pe Δ ca pătratul unui număr complex: $\Delta = (2i)^2$. Avem atunci

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \boxed{-1 \pm i}$$

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real avem $f'(x) = \boxed{3x^2 - 4}$.

(b) Observăm că $f(2) = 0$. Limita se scrie atunci

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

care, conform definiţiei derivatei într-un punct, este egală cu $f'(2) = \boxed{8}$.

(c) Ecuaţia tangentei cerute este

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

Înlocuind $f(2)$ şi $f'(2)$ obţinem $y - 0 = 8(x - 2)$ adică

$$\boxed{y = 8x - 16}$$

(d) Pentru o funţie de două ori derivabilă, punctele de inflexiune se află printre rădăcinile derivatei secunde, şi anume acelea în care f'' schimbă semnul. Derivata a doua este $f''(x) = 6x, \forall x \in \mathbb{R}$. Egalând cu 0 avem $6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Cum f'' schimbă semnul în $x = 0$ obţinem că el este punct de inflexiune.

(e) Pentru calculul limitei vom folosi următoarea limită fundamentală:

$$u(x) \to 0 \Rightarrow (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} \to e$$

Avem atunci

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x^3}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^3}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x^2}\cdot x^2} = \boxed{e^{-4}}\end{aligned}$$

Am aplicat limita amintită pentru $u(x) = \dfrac{-4}{x^2}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Cum $\det(A) = -1 - 0 = \boxed{-1}$, iar A este matrice pătratică şi are determinantul nenul, rangul ei va fi egal cu dimensiunea matricei, adică $\boxed{2}$.

(b) Prin calcul direct

$$\begin{aligned}A^2 + AB + B &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2\end{aligned}$$

(c) Fie $X = \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$. Ecuaţia $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} u + 2v = 1 \\ -v = 1 \end{cases}$$

Rezolvându-l obţinem $v = -1,\ u = 3$, deci $X = \boxed{\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}}$.

(d) Fie $X = \begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} \in G$. Atunci

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2z & y+2w\\ -z & -w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & 2x-y\\ z & 2z-w\end{pmatrix}$$

Explicitând egalitatea de matrice rezultă sistemul

$$\begin{cases} x+2z = x \\ y+2w = 2x-y \\ -z = z \\ -w = 2z-w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y+w \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Deci $X = \begin{pmatrix} y+w & y \\ 0 & w \end{pmatrix}$. Vrem să determinăm a şi b astfel încât $X = aI_2 + bB$, adică

$$\begin{pmatrix} y+w & y \\ 0 & w \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} y+w = a \\ y = b \\ w = a-b \end{cases}$$

cu soluţiile $a = y+w, b = y$. Rezultă astfel existenţa numerelor complexe a şi b cerute.

(e) Calculăm A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Avem atunci $A^{2k} = I_2,\ A^{2k+1} = A, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Suma cerută va fi

$$\underbrace{A + I_2 + A + I_2 + \ldots + I_2 + A}_{2007-\text{termeni}}$$

Deoarece 1004 din termeni sunt egali cu A şi 1003 egali cu I_2, suma este $1004A + 1003I_2 = 1004\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 1003\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1004 & 2008 \\ 0 & -1004 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1003 & 0 \\ 0 & 1003 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2007 & 2008 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

(f) Notăm $Y = A - B + I_2$. Avem atunci

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculăm câteva puteri ale lui Y

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^4 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bănuim că

$$Y^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificăm prin inducţie că $P(n) : Y^n = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Evident $P(1) : Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este adevřată.

Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată. Intr-adevăr

$$\begin{aligned} Y^{n+1} &= Y^n Y = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^n + 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Dacă $X \in G$, conform punctului (d), există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, deci $\det(X) = a(a-b)$. Luăm, de exemplu, $a = 2007, b = 2006$, adică $X = \boxed{\begin{pmatrix} 2007 & 2006 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ şi avem $\det(X) = 2007$.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Prin calcul direct, pentru orice $x > 0$ avem

$$f(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1 - x - 1 + x}{x^2 + x} = 0$$

(b) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = -\frac{(x^2+x)'}{(x^2+x)^2} = \boxed{\frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}}$.

(c) Cercetăm mai întâi existenţa asimptotelor orizontale sau oblice. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{\infty} = 0$, rezultă că $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală pentru graficul lui f spre ∞.

Căutăm acum o posibilă asimptotă verticală. Cum f este continuă pe tot domeniul de definiţie, singurul candidat este $x = 0$. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \frac{1}{0_+} = \infty$, rezultă că $\boxed{x = 0}$ este asimptotă verticală la dreapta, spre ∞, pentru graficul lui f.

(d) Pentru orice $x > 0$, din calculul de la punctul (a) se vede că $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(e) Conform punctului (a), $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $\forall x > 0$. Dându-i lui x succesiv valorile $1, 2, ..., n$ şi sumând obţinem

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + ... + f(n) &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Limita cerută va fi $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \boxed{1}$.

(f) Pentru calculul integralei vom utiliza din nou descompunerea lui f dată de punctul (a)

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 3 - \ln 1 + \ln 2 = \boxed{\ln \tfrac{4}{3}} \end{aligned}$$

(g) Aria cerută este $\int_1^2 |f(x)|\,dx$. Deoarece $f(x) > 0, \forall x \in [1,2]$, folosind punctul (f), aria este egală cu $\int_1^2 f(x)\,dx = \ln\frac{4}{3}$. Mai rămâne să arătăm că

$$\ln\frac{4}{3} < \frac{1}{2}$$

Echivalent, $\ln\frac{4}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow e > \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$. Dar $e \simeq 2,7182$, deci

$$e > 2 > \frac{16}{9}$$

Obţinem astfel cerinţa problemei.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.