BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 3

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 3

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $z_1 + z_2 = (1+i) + (-1+i) = \boxed{2i}$.

(b) $|AC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-(-2))^2} = \boxed{4\sqrt{2}}$.

(c) Deoarece $i^2 = -1$ avem $i^4 = 1$, deci $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i - 1 - i + 1 = 0$. Partea reală căutată este $\boxed{0}$.

(d) Doi vectori directori ai celor două drepte sunt $\vec{u} = (1, -1)$ respectiv $\vec{v} = (\alpha, -1)$. Cei doi vectori sunt perpendiculari dacă şi numai dacă

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\alpha = -1}.$$

(e) Aria triunghiului este dată de formula $\dfrac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4 - 3 \cdot (-4) = 8$. Deci aria triunghiului este $\boxed{4}$.

(f) Ecuaţia cercului se scrie succesiv sub formele echivalente

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (y-1)^2 = 1^2.$$

Evident, raza cercului este $\boxed{r = 1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) În inelul $\mathbb{Z}_9$ avem $\hat{5} \cdot \hat{2} = \widehat{10} = \hat{1}$, deci $\hat{5}^{-1} = \boxed{\hat{2}}$.

(b) $\dfrac{5! - 4!}{2!} = \dfrac{120 - 24}{2} = \boxed{48}$.

(c) $\log_9 z = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 9^2 = \boxed{81} > 0$.

(d) $3^{x^2} - 9^x \;\Leftrightarrow\; 3^{x^2} = 3^{2x} \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x \in \{0, 2\}}$.

(e) Deoarece $3^1 < 3^2 = 9 \leq 20 < 27 = 3^3 < 3^4 < 3^5$, notăm că 2 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac inegalitatea din enunţ. Deci probabilitatea este $\boxed{\dfrac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{2^x \cdot \ln 2}$.

(b)
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2^x + 1)\,dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + x\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{\ln 2} + 1}.$$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0) = \boxed{\ln 2}$.

(d) Evident $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Scoţând factor comun forţat n^2 atât la numitor cât şi la numărător, obţinem
$$\lim_{n\to\infty} \frac{25n^2+3}{2n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{25+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{3}{n^2}} = \frac{25+0}{2-0} = \boxed{\frac{25}{2}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr $A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

(b) Deoarece $\det A = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = \boxed{0}$, rangul matricei A nu este maxim. Având un element nenul, rangul lui A este $\boxed{1}$.

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

(d) Folosind repetat punctul precedent, obţinem
$$A^{2007} = A^2 \cdot A^{2005} = A \cdot A^{2005} = A^2 \cdot A^{2004} = \ldots \boxed{A}.$$
O demonstraţie ultra-riguroasă se face prin inducţie.

(e) *Verificarea.* Pentru $n = 1$ obţinem exact relaţia demonstrată la punctul (a). *Pasul de inducţie.* Presupunem că $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$. Atunci folosind punctele (a) şi (c) avem
$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \cdot B = [I_2 + (2^n - 1)A](I_2 + A) \\ &= I_2 + (2^n - 1)A + A + (2^n - 1)A^2 \\ &= I_2 + 2^n A + (2^n - 1)A = I_2 + (2^{n+1} - 1)A \end{aligned}$$
Conform principiului inducţiei matematice, afirmaţia din enunţ este demonstrată.

(f) Matricea $aA + bB + cI_2$ are pe a doua linie, prima coloană elementul 0, deci nu poate fi egală cu matricea C care are pe aceaşi pozitiţie elementul $7 \neq 0$.

(g) La punctul (d), de fapt am arătat că $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind punctul (e), calculăm
$$X = A^n + B^n = A + I_2 + (2^n - 1)A = I_2 + 2^n A = \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci $\det(A^n + B^n) = 2^n + 1 \neq 0$, deci matricea $A^n + B^n$ este inversabilă.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \boxed{-\sin x}$ şi $g'(x) = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$.

(b) Folosind formula $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{1}{\pi}}$

(d) Cum g este continuă pe domeniul de definiţie, graficul lui g poate avea o asimptotă verticală doar în $x = 0$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$, graficul lui g are ca asimptotă verticală dreapta de ecuaţie $\boxed{x = 0}$.

(e) Fie $t \in \mathbb{R}$ şi $x > 0$. Atunci

$$t^2\cos^2 x - 2t\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(t\cos x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

(f) Fie $t \in \mathbb{R}$ arbitrar. Integrând inegalitatea de la (e) (exact cum ni s-a "suflat") şi folosind monotonia şi liniaritatea integralei, obţinem

$$t^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x\,dx - 2t\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(t^2\cos^2 x - 2t\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx \geq 0$$

(g) Considerăm funcţia de gradul doi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(t) = t^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x\,dx - 2t\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Conform punctului precedent, avem $h(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Atunci discriminantul acestei funcţii de gradul doi este mai mic sau egal cu zero. Explicitând, obţinem

$$4\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx\right)^2 - 4\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x\,dx\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2}\,dx\right) \leq 0$$

inegalitate care este evident echivalentă cu cea din enunţ.

Observaţie. Rezultatul de la ultimul punct se generalizează (urmând **exact** ideile de mai sus) la următoarea inegalitate, valabilă pentru orice funcţii integrabile f şi g pe un interval $[a, b]$:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx\,.$$

Această importantă inegalitate este cunoscută sub numele de inegalitatea *Cauchy–Schwartz* sau *Cauchy–Buniakowski–Schwartz*.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.