BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 37

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 37

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cu formula distanţei (teorema lui Pitagora) avem

$$d(A,B) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2} = \boxed{5}$$

(b) Triunghiul OAB este dreptunghic cu unghiul drept în O. Atunci

$$\sin\widehat{OAB} = \frac{OB}{AB} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

(c) $\text{Aria}_{OAB} = \dfrac{OA \cdot OB}{2} = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = \boxed{6}$.

(d) $|(3-i)^2| = |3-i|^2 = \left(\sqrt{3^2 + (-1)^2}\right)^2 = \boxed{10}$

(e) Fie $h = d(O, AB)$. Scriem aria triunghiului OAB într-un alt mod decât la (c): $\text{Aria}_{OAB} = \dfrac{AB \cdot h}{2}$. Substituind valorile cunoscute, avem $6 = \dfrac{5h}{2}$, de unde

$$\boxed{h = \frac{12}{5}}.$$

(f) Căutăm z de forma $z = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$. Ecuaţia se scrie $z - \overline{z} = 4i \Leftrightarrow (x+iy) - \overline{x+iy} = 4i \Leftrightarrow x + iy - (x - iy) = 4i \Leftrightarrow 2iy = 4i \Leftrightarrow y = 2$. Putem lua deci $z = \boxed{0 + 2i}$, sau dacă vreţi un alt exemplu, $z = \boxed{2007 + 2i}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Efectuăm împărţirea lui g la f.

$$\begin{array}{r|l}
X^3 + 27 & X^2 + 3X + 9 \\ \cline{2-2}
-X^3 - 3X^2 - 9X & \qquad X - 3 \\ \cline{1-1}
-3X^2 - 9X + 27 & \\
3X^2 + 9X + 27 & \\ \cline{1-1}
54 &
\end{array}$$

Obţinem câtul $X - 3$ şi restul $\boxed{54}$.

(b) Intre factori se găseşte $g(-3) = (-3)^3 + 27 = -27 + 27 = 0$, deci produsul este $\boxed{0}$.

(c) Conform primei relaţii a lui Viète, $x_1 + x_2 = -\frac{3}{1} = \boxed{-3}$.

(d) Folosind acum ambele relaţii ale lui Viète, avem $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-3)^2 - 2 \cdot 9 = \boxed{-9}$.

(e) Polinomul se poate scrie $g = x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ (am folosit formula de calcul prescurtat pentru suma de cuburi). Cum discriminantul ecuaţiei de gradul doi $x^2 - 3x + 9 = 0$ este $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -27 < 0$, această ecuaţie nu are rădăcini reale. Deci doar una din cele 3 rădăcini ale lui g este reală; probabilitatea căutată este $\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{2 - \sin x}$.

(b) Deoarece $f(x) \le 2x + 1$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x + 1) = -\infty$, rezultă că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$.

(c) Cum $f'(x) = 2 - \sin x \ge 1 > 0$, funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci nu are nici un punct de extrem.

(d) **Prima rezolvare** Observăm că avem un caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Aplicând teorema lui l'Hopital avem $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sin x}{1} = \boxed{2}$.

A doua rezolvare Observăm că $f(0) = 1$. Atunci din definiţia derivatei într-un punct, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \boxed{2}$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx = \left(x^2 + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Să observăm că $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | A = {}^tA\}$. Reamintim că operaţia de traspunere are proprietăţile ${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ şi ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(a) Avem $O_2 = {}^tO_2$ şi $I_2 = {}^tI_2$, deci $I_2, O_2 \in M$.

(b) Cum ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA$, rezultă că $A + {}^tA \in M$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(c) **Comentariu:** Acest exerciţiu ar fi trebuit schimbat la 19 februarie, fiind prea confuz. Nu este deloc clar dacă trebuie să luăm o matrice generică din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, sau una după plac. Suspectăm că ar fi trebuit să fie $A \in M$ în enunţ. Ghidându-ne după indicaţiile oficiale (ce denotă aceaşi lipsă totală de rigoare) "ghicim" următorul

Enunţ completat. *Fie* $A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. *Să se calculeze* $\det(A + {}^tA)$ *în funcţie de* m, n, p, q.

Rezolvare: $\det(A + {}^tA) = \begin{vmatrix} 2m & n+p \\ n+p & 2q \end{vmatrix} = \boxed{4mq - (n+p)^2}$

(d) Fie $A \in M$, ceea ce reamintim revine la ${}^tA = A$. Atunci ${}^t(A^2) = {}^tA{}^tA = A \cdot A = A^2$. Deci $A^2 \in M$.

(e) **Comentariu:** Iată încă un enunţ **neglijent**. Ipoteza $P \in M$ este complet inutilă din moment ce se scrie chiar matricea. Esenţial este că $\det P = 0$ şi nu faptul că $P \in M$.

Căutăm $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M,\ Q \neq O_2$ astfel îcât

$$PQ = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4a - 6b & 4b - 6c \\ -6a + 9b & -6b + 9c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obţinem un sistem de 4 ecuaţii cu 3 necunoscute,

$$\begin{cases} 4a & -6b & & = 0 \\ & 4b & -6c & = 0 \\ -6a & +9b & & = 0 \\ & -6b & +9c & = 0 \end{cases}.$$

sistem al cărui rang este 2. Alegem variabila principală b şi atunci $a = \frac{3b}{2}$, $c = \frac{2b}{3}$. Pentru orice valoare nenulă a lui b obţinem o matrice Q. De exemplu, luând $b = 12$, avem $Q = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

O soluţie mai scurtă pe cazul cel mai general. *Fie* $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *o matrice neinversabilă. Atunci există* $Q \in M$ *astfel încât* $PQ = O_2$.

Rezolvare: Deoarece sistemul liniar omogen asociat matricii P are cel puţin o soluţie (x, y) nenulă, alegem matricea $R = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix}$ care are proprietatea că $PR = O_2$. Atunci $Q = R{}^tR \in M$, deoarece ${}^tQ = {}^t(R{}^tR) = {}^t({}^tR){}^tR = R{}^tR = Q$ şi, în plus, $PQ = PR{}^tR = O_2{}^tR = O_2$. Rămâne doar să verificăm faptul că $P \neq O_2$. Or, elementele de pe diagonală ale matricii R sunt x^2 şi y^2, care din modul în care au fost alese nu pot fi simultan nule!

(f) De exemplu $C = \begin{pmatrix} 2007 & 0 \\ 0 & -2007 \end{pmatrix} \in M$.

(g) De exemplu $X = Y = -I_2$. Evident $-I_2 \in M$ şi $(-I_2)(-I_2) = I_2$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Aducând la acelaşi numitor obţinem

$$x+2+\frac{4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)+4}{x-2}=\frac{x^2-4+4}{x-2}=f(x),\quad \forall x\neq 2\,.$$

(b) Folosind forma de la punctul (a): $f'(x)=\boxed{1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}}$, $\forall x\neq 2$.

(c) Ecuaţia este $y-f(3)=f'(3)(x-3)$, sau după substituiri, $\boxed{y-9=-3(x-3)}$. Hopa! Am uitat, cumva, ceva? Da! Trebuie să verificăm faptul că punctul $A(3,9)$ este într-adevăr pe grafic, fapt ce se dovedeşte adevărat, deoarece $f(3)=\frac{3^2}{3-2}=9$.

(d) Căutăm o asimptotă oblică de ecuaţie $y=mx+n$. Avem

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1\\ n &= \lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[2+\frac{4}{x-2}\right]=2 \end{aligned}$$

Asimptota la graficul lui f către $+\infty$ este dreapta de ecuaţie $\boxed{y=x+2}$.

(e) Cum $f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}>0$ pentru orice $x\in(2,\infty)$, rezultă că f este convexă pe $[2,\infty)$.

(f) $\int_0^1 f(x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x+4\ln|x-2|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+2-4\ln 2=\boxed{\frac{5}{2}-4\ln 2}$

(g) Folosind formula de la (b) vedem că $f'(x)$ este strict negativă pe $(0,2)\cup(2,4)$, deci în consecinţă şi pe intervalul $[3,4)$. Funcţia este atunci strict descrescătoare pe $[3,4]$, de unde $8=f(4)\leq f(x)\leq f(3)=9$, pentru orice $x\in[3,4]$. Integrând această inegalităţi şi folosind monotonia integralei, deducem $8=\int_3^4 8dx\leq\int_3^4 f(x)dx\leq\int_3^4 9\,dx=9$, qed.