BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 35

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 35

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cum punctul M se află pe dreaptă, coordonatele sale satisfac ecuaţia dreptei, deci $2a + 4b - 5 = 0 \Leftrightarrow 2(a + 2b) = 5 \Leftrightarrow a + 2b = \boxed{\frac{5}{2}}$.

(b) Ecuaţia cercului se scrie sub forma $x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 1$, sau $x^2 + (y - 1)^2 = 1^2$. De aici se vede că raza cercului are lungimea $\boxed{1}$.

(c) Cel mai mare dintre numerele reale $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ este evident $\boxed{\cos\frac{\pi}{3}}$.

(d) Un număr complex nereal de modul $\sqrt{10}$ este $\boxed{i\sqrt{10}}$.

(e) $\cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = \boxed{0}$

(f) Folosind formula lui de Moivre, avem

$$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

Partea reală acestui număr este $\boxed{-1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Deoarece $\hat{7} \cdot \hat{7} = \widehat{49} = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_8$, simetricul faţă de înmulţire al lui $\hat{7}$ în $\mathbb{Z}_8$ este $\hat{7}^{-1} = \boxed{\hat{7}}$.

(b) În $\mathbb{Z}_8$ avem $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} = \widehat{25} = \boxed{\hat{1}}$.

(c) $4^x = 8 \Leftrightarrow (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \boxed{\frac{3}{2}} \in \mathbb{Q}$.

(d) Restul împărţirii polinomului f la $X - 1$ este $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + 3 = \boxed{2}$.

(e) O echipă de 4 persoane de poate alege în $\boxed{C_5^4 = 5}$ moduri dintr-un grup de 5 persoane.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{2007x^{2006}}$.

(c) Deoarece $f'(x) = 2007x^{2006} > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(b) Folosind punctul (c), avem $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Prin urmare, $\boxed{a < b}$.

(d) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^{2007}\,dx = \left(\frac{x^{2008}}{2008}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2008}}$

(e) Deoarece funcţia $x \mapsto \sin x$ este mărginită, iar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2007}} = 0$, rezultă că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \sin x \cdot \frac{1}{x^{2007}} = \boxed{0}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Cum $\det A = 1\cdot 1 - 0\cdot 2 = 1$ şi $\det B = 1\cdot 1 - 0\cdot 3 = 1$, rezultă $\det A = \det B$.

(b) Cum matricea B are determinantul nenul, rezultă că rangul său este maxim, adică 2. Pe de altă parte, $\det C = 2\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0$, deci rangul lui C nu este 2. Având un element nenul, rangul lui C este 1. Rezultă că $\operatorname{rang} B = 2 > 1 = \operatorname{rang} C$.

(c) Matricea A având determinantul nenul, este inversabilă. Atunci $X \cdot A = C \Leftrightarrow X = \boxed{C \cdot A^{-1}}$. Deci X este într-adevăr unică.

(d) Pentru $Y = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$ şi $Z = \boxed{2Y}$, avem $CY = CZ = O_2$.

(e) Să observăm că $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^2$ (verificare prin calcul direct). Atunci pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem $A^{3p} = B^{2p}$. Luând $m = 3p$, $n = 2p$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, avem o infinitate de perechi cu proprietatea cerută.

(f) Cum $\det A = 1 \neq 0$, matricea A este inversabilă. Atunci

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = A^* = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(g) Substituind matricele A, B şi C, condiţia $xA + yB + zC = O_2$ este echivalentă cu $\begin{pmatrix} x+y+2z & 2x+3y+z \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Identificând elementele corespunzătoare ale celor două matrice obţinem sistemul

$$\begin{cases} x+y+2z &= 0 \\ 2x+3y+z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

Scăzând din prima ecuaţie pe ultima, obţinem $z=0$. Substituind în primele două ecuaţii acestea devin $\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2xz+3y &= 0 \end{cases}$. Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, deducem $y=0$ şi substituind această valoare în prima ecuaţia avem şi $x=0$. Prin urmare, $\boxed{x=y=z=0}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru a nu pierde timpul cu calculul unor derivate laterale să observăm că putem extinde domeniul de definiţie al lui f la $\mathbb{R}$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \cos x + x(-\sin x) - \cos x = \boxed{-x\sin x}$.

(b) Deoarece $f'(x) = -x\sin x < 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) De asemenea, ca să nu fim nevoiţi să calculăm o derivată laterală, vom extinde domeniul de definţie al lui g la $(0,\infty)$. Atunci pentru orice $x>0$, avem

$$g'(x) = \boxed{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}.$$

(d) Continuând calculul de la punctul precedent, vedem că $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. Conform punctului (b), pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem $f(x) \le f(0) = 0$. Atunci $g'(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi în consecinţă funcţia g este strict descrescătoare pe $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(e) Conform punctului precedent $\frac{2}{\pi} = g\left(\frac{\pi}{2}\right) \le g(x) < \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(f)

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)\,dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (x\cos x + \sin x - 2\sin x)\,dx \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (x\sin x + 2\cos x)'\,dx = (x\sin x + 2\cos x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} = \boxed{\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

(g) Inegalitatea din partea stângă de la punctul (g) se poate scrie $g(x) \geq \frac{2}{\pi}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Integrând această inegalitate pe intervalul $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi folosind monotonia integralei, obţinem

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} g(x)\,dx \geq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.