BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 2

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 2

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Distanţa este $\sqrt{(-3-3)^2+(3-(-3))^2} = \sqrt{36+36} = \boxed{6\sqrt{2}}$.

(b) Cum $z = (3i)^3 = 3^3 i^3 = -27i$, partea reală a lui z este $\boxed{0}$.

(c) Lungimea vectorului este $\sqrt{4^2+3^2} = \boxed{5}$.

(d) Două drepte sunt paralele dacă au aceaşi pantă. Panta dreptei din enunţ este 3. Un exemplu de dreaptă paralelă cu dreapta dată este $\boxed{y-3x=0}$.

(e) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = 1 + 0 = \boxed{0}$.

(f) Cum $3^2+4^2 = 5^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul este dreptunghic. Aria sa este jumătate din produsul catetelor, adică $\frac{3\cdot 4}{2} = \boxed{6}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Prima cifră poate lua oricare din valorile $1, 2, 3, \ldots, 9$. Ultimele două cifre pot fi oricare din următoarele secvenţe $03, 12, 21, 30$. Folosind principiul fundamental al combinatoricii, putem forma $9\cdot 4 = \boxed{36}$, asemenea numere.

(b) De exemplu $A = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$. Dacă acest exemplu nu vă place, puteţi considera $A = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2007 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}$.

(c) Avem $\log_3(3+x) = 3 \Leftrightarrow 3+x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3^3 - 3 \Leftrightarrow x = \boxed{24}$. Se vede că aceasta este soluţie satisface condiţia de existenţă a logaritmului.

(d) Observăm că $\hat{y}$ (inutilă notaţia cu căciulă; de ce nu putem nota pur şi simplu y?) nu poate fi clasa unui număr par deoarece membrul stâng ar fi egal cu $\hat{0}$. Pe de altă parte, avem $\hat{3}\cdot\hat{1} = \hat{3}\cdot\hat{3} = \hat{3}\cdot\hat{5} = \hat{1}$, deci soluţiile sunt $y \in \boxed{\{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}}$.

(e) De exemplu, $\boxed{0, 1, 2}$. Sau pentru cei curioşi să ştie procesul de fabricaţie, iată-l în cele ce urmează. Alegeţi două numere reale cu suma 3, să zicem $a_2 = -3$ şi $a_3 = 6$. Diferenţa acestor numere este $r = 6 - (-3) = 9$, iar $a_1 = a_2 - r = -3 - 9 = -12$. Am obţinut un alt exemplu $\boxed{-12, -3, 6}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{\cos x}$.

(b) Cum avem o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$, folosind regula lui l'Hopital, obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{1} = \boxed{3}.$$

(c) Numărătorul este mărginit, iar numitorul converge la ∞, deci

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin 3x}{x} = \boxed{0}.$$

(d) Punctele de extrem local ale lui f sunt acele valori ale lui x în care $f'(x) = \cos x$ se anulează şi îşi schimbă semnul. De exemplu, putem lua $x \in \boxed{\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\}}$.

(e) $\displaystyle\int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \int_0^{3\pi} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{3\pi} = -(-1) - (-1) = \boxed{2}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $\det(H) = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = \boxed{-1}$

(b) $(A + iI_2)(A - iI_2) = A^2 - iA + iA - i^2 I_2 = A^2 + I_2$

(c) Avem $f_H(z) = \begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 3 & 2-z \end{vmatrix} = (1-z)(2-z) - 3 = z^2 - 3z - 1$. Dacă ecuaţia $z^2 - 3z - 1 = 0$ ar avea o rădăcină raţională, atunci aceasta trebuie să fie de forma $\frac{p}{q}$, unde p divide termenul liber -1, iar q divide coeficientul dominant 1. Deci singurele rădăcini raţionale posibile sunt 1 şi -1. Cum $f_H(1) = 1^2 - 3 - 1 = -3 \neq 0$ şi $f_H(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 1 = 3 \neq 0$, rezultă că ecuaţia nu are nici o rădăcină raţională.

(d) Pentru $A = I_2$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avem $f_A(1) = \det(A - I_2) = \det(O_2) = 0$ şi $\det(B - I_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

(e) $f_H(i) = \begin{vmatrix} 1-i & 1 \\ 3 & 2-i \end{vmatrix} = (2 - 3i + i^2) - 3 = \boxed{-2-3i}$.

(f) Conform punctului (b), avem $(H + iI_2)(H - iI_2) = H^2 + I_2$. Conform teoremei lui Laplace (determinantul unui produs de matrice este produsul determinanţilor matricelor) de aici rezultă

$$\det(H^2 + I_2) = \det(H + iI_2)\det(H - iI_2) = f_H(i) f_H(-i)\,.$$

(g) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. La fel ca la punctul (f) se demonstrează că $\det(X^2 + I_2) = f_X(i)f_X(-i)$. Dar $f_X(i) = \begin{vmatrix} x+i & y \\ z & t+i \end{vmatrix} = xt+ix+it+i^2-yz = (xt-yz)-1+i(x+t) = -2+i(x+t)$. La fel obţinem $f_X(-i) = -2-i(x+t)$. Astfel

$$\det(X^2 + I_2) = [-2 + i(x+t)][-2 - i(x+t)] = 4 + (x+t)^2 \geq 4\,.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{2x}$ şi $g'(x) = \boxed{\dfrac{2x}{1+x^2}}$.

(b) Ambele derivate se anulează doar pentru $x = 0$. Mai mult pentru $x < 0$, avem $f'(x) < 0$ şi $g'(x) < 0$, deci f si g sunt strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$. De asemenea, pentru $x > 0$ avem $f'(x) > 0$ şi $g'(x) > 0$, deci f şi g sunt strict crescătoare pe $[0, \infty)$. Rezultă că $x = \boxed{0}$ este punct de minim atât pentru f cât şi pentru g.

(c) Având un caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$, folosim regula lui l'Hopital şi obţinem

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = \boxed{1}\,.$$

(d) $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$

(e) Integrând prin părţi avem

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x' \ln(1+x^2)\,dx \\ &= x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \ln 2 - 2 + 2\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 \\ &= \boxed{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}\,. \end{aligned}$$

(f) Fie $h : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(t) = t - \ln(1+t)$. Pentru orice $t > -1$ avem $h'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t}$. Cum $h'(t) < 0$ pentru $t < 0$ şi $h'(t) > 0$ pentru $t > 0$, rezultă că $t = 0$ este un punct de minim pentru h. Deci $h(t) \geq h(0) = 0$. Pentru $t = x^2$, obţinem $h(x^2) = x^2 - \ln(1+x^2) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(g) Integrând inegalitatea de la punctul precedent şi folosind monotonia integralei, avem $I = \int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 g(x),dx = J$. Iar inegalitatea $I \geq J$ se poate aranja uşor sub forma $\ln 2 + \frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{3}$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.