BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 29

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 29

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|BC| = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = \boxed{5}$

(b) Calculăm şi lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului ABC. Avem

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(3-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5} \\ |AC| &= \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Deoarece $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza BC.

(c) Fie d distanţa de la A la BC. Aria triunghiului ABC poate fi exprimată în două moduri $\text{Aria}_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \frac{|BC| \cdot d}{2}$. De aici obţinem

$$d = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|BC|} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{5} = \boxed{2}.$$

(d) Coordonetele punctelor A şi C trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, de unde avem

$$\begin{cases} 3 + m \cdot 1 + n = 0 \\ 1 + m \cdot 5 + n = 0 \end{cases}.$$

Scăzând din a doua ecuaţie pe prima, obţinem $-2 + 4m = 0 \Rightarrow m = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Substituind în prima ecuaţie deducem $3 + \frac{1}{2} + n = 0 \Rightarrow n = \boxed{-\frac{7}{2}}$.

(e) Pentru ca să fie dreptunghi, patrulaterul $ABCD$ trebuie să fie în particular paralelogram. Atunci mijlocul diagonalelor AC şi BD are aceleaşi coordonate, deci $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \left(\frac{5+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$. Deducem, $a = \boxed{-1}$, $b = \boxed{4}$. Pentru aceste valori, cum diagonalele se intersectează în părţi egale, patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram. Având unghiul B drept (conform (b)) este chiar un dreptunghi.

(f) Conform formulei fundamentale a trigonometriei, avem

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{4}}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $5^{1+x^2} = 25^x \Leftrightarrow 5^{1+x^2} = (5^2)^x \Leftrightarrow 5^{1+x^2} = 5^{2x} \Leftrightarrow 1+x^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \boxed{1}$

(b) Folosind formula $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ valabilă pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, avem

$C_5^3 - C_5^2 + C_5^5 = \dfrac{5!}{3!2!} - \dfrac{5!}{2!3!} + \dfrac{5!}{5!0!} = \boxed{1}$. Am folosit faptul că $0! = 1$.

(c) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 6 = \boxed{1} \in \mathbb{N}$

(d) $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(-2 \cdot 3 + 7) = f(1) = -2 \cdot 1 + 7 = \boxed{5}$

(e) Deoarece prin calcul direct $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$, avem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2007} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2005} = O_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{O_2}.$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > -2$, avem $f'(x) = \boxed{1 - \dfrac{2}{(x+2)^2}}$.

(b) Conform definiţiei derivatei într-un punct, limita este $f'(1) = 1 - \dfrac{2}{3^2} = \boxed{\dfrac{7}{9}}$.

(c) Avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(x + \frac{2}{x+2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\ln|x+2|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + 2\ln 3 - \frac{0}{2} - 2\ln 2 \\ &= \boxed{\frac{1}{2} + 2\ln\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

(d) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \dfrac{2}{x+2}\right) = \infty + 0 = \infty$, graficul lui f nu are asimptotă orizontală către ∞. Căutăm o asimptotă oblică de forma $y = mx+n$. Atunci

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x(x+2)}\right) = 1 \\ n &= \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{aligned}$$

In concluzie, dreapta de ecuaţie $\boxed{y = x}$ este asimptotă oblică la graficul lui f către ∞.

(e) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nf(n)}{n^2 + 2007} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \frac{2n}{n+2}}{n^2 + 2007} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n(n+2)}}{1 + \frac{2007}{n^2}} = \boxed{1}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $f(0) = i^{20} + (-i)^{20} = 2i^{20} = 2(i^2)^{10} = 2(-1)^{10} = \boxed{2}$

(b) Coeficientul dominant este $a_{20} = 1+1 = \boxed{2}$. Termenul liber este $a_0 = f(0) = 2$.

(c) Suma coeficienţilor polinomului f este $f(1)$. In cazul de faţă obţinem

$$\begin{aligned} f(1) &= (1+i)^{20} + (1-i)^{20} = [(1+i)^2]^{10} + [(1-i)^2]^{10} \\ &= (1+2i+i^2)^{10} + (1-2i+i^2)^{10} = (2i)^{10} + (-2i)^{10} \\ &= 2 \cdot 2^{10} \cdot i^{10} = 2^{11} \cdot (i^2)^5 = 2^{11} \cdot (-1)^5 = \boxed{-2^{11}} \end{aligned}$$

(d) $f(i) = (i+i)^{20} + (i-i)^{20} = (2i)^{20} = 2^{20} \cdot (i^2)^{10} = 2^{20} \cdot (-1)^{10} = \boxed{2^{20}} \in \mathbb{R}$

(e) Din teorema lui Bezout, restul împărţirii lui f la $X - i$ este $f(i) = \boxed{2^{20}}$.

(f) Fie z rădăcină a lui f. Atunci $f(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; (z+i)^{20} = -(z-i)^{20}$. Considerând modulul ambilor membri ai egalităţii, obţinem

$$|(z+i)^{20}| = |-(z-i)^{20}| \;\Rightarrow\; |z+i|^{20} = |z-i|^{20} \;\Rightarrow\; |z+i| = |z-i|\,.$$

(g) Fie $z = a + bi$ o rădăcină a lui f, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Conform punctului precedent, avem $|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow |a+bi+i| = |a+bi-i| \Leftrightarrow |a+(b+1)i|^2 = |a+(b-1)i|^2 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 = a^2 + (b-1)^2 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{2006(x+2)^{2005} - 2006x^{2005}}$.

(b) Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(-1-x) + f(-1+x) = (-1-x+2)^{2006} - (-1-x)^{2006} + (-1+x+2)^{2006} - (-1+x)^{2006} = (1-x)^{2006} - [-(1+x)]^{2006} + (1+x)^{2006} - [-(1-x)]^{2006} = (1-x)^{2006} - (1+x)^{2006} + (1+x)^{2006} - (1-x)^{2006} = 0$.

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $x + 2 > x \Rightarrow (x+2)^{2005} > x^{2005}$, deci

$$f'(x) = 2006[(x+2)^{2005} - x^{2005}] > 0\,.$$

Rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(d) Conform punctului precedent funcţia este strict crescătoare, deci injectivă. Astfel ecuaţia $f(x) = 0$ are cel mult o rădăcină reală. Dar luând $x = 0$ în relaţia de la punctul (b), avem $f(-1) + f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$. Deci $x = \boxed{-1}$ este unica soluţie reală a ecuaţiei.

(e) **Prima soluţie.**

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-3}^{1}((x+2)^{2006}-x^{2006})\,dx = \left(\frac{(x+2)^{2007}}{2007}-\frac{x^{2007}}{2007}\right)\Big|_{-3}^{1}\\ &= \frac{3^{2007}}{2007}-\frac{(-1)^{2007}}{2007}-\frac{1^{2007}}{2007}+\frac{(-3)^{2007}}{2007}=\boxed{0}.\end{aligned}$$

A doua soluţie. Introducem funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=f(-1+x)$. Identitatea de la (b) ne spune exact faptul că funcţia g este impară. Revenind la integrala din enunţ, folosind substituţia $y=x+1$, obţinem

$$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f(-1+y)\,dy = \int_{-2}^{2} g(y)\,dy = 0\,,$$

deoarece integrăm o funcţie impară pe un interval simetric faţă de origine.

(f) Funcţia f este o funcţie polinomială de gradul 2005 cu coeficientul dominant pozitiv. Într-adevăr, folosind binomul lui Newton avem

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+2)^{2006}-x^{2006}\\ &= (x^{2006}+C_{2006}^{1}x^{2005}+C_{2006}^{2}x^{2004}+\ldots+2^{2006})-x^{2006}\\ &= 2006x^{2005}+C_{2006}^{2}x^{2004}+\ldots+2^{2006}\end{aligned}$$

Atunci $\lim_{x\to\infty} f(x)=\boxed{\infty}$.

(g) Continuând calculul de la punctul (a), obţinem derivata a doua

$$f''(x)=2006\cdot 2005[(x+2)^{2004}-x^{2004}],\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Rezolvăm ecuaţia $f''(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)^{2004}=x^{2004}$. Cum $x=0$ nu este o soluţie a acestei ecuaţii, împărţind la x^{2004} obţinem ecuaţia echivalentă $\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2004}=1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x}=\pm 1$. Ecuaţia $\frac{x+2}{x}=1 \Leftrightarrow x+2=x$ este imposibilă, iar ecuaţia $\frac{x+2}{x}=-1 \Leftrightarrow x+2=-x$ are soluţia $x=-1$. Având rădăcina unică $x=-1$, funcţia continuă f'' are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty,-1)$ şi $(-1,\infty)$. Dar $f''(-2)=2006\cdot 2005[(-2+2)^{2004}-(-2)^{2004}]=-2006\cdot 2005\cdot 2^{2004}<0$, deci f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1]$. De asemenea, $f''(0)=2006\cdot 2005\cdot 2^{2004}>0$, deci f este convexă pe intervalul $[-1,\infty)$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.