BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 28

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 28

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|z| = 2 \cdot |i| \cdot |1+i| = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$

(b) $BC = \sqrt{(5-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25+9} = \boxed{34}$

(c) $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 3 - 20 = -8$$

Deci

$$\boxed{S_{ABC} = 4}$$

(d) Impunând condiţia ca A şi C să aparţină dreptei, obţinem $1 + 4m + n = 0$ şi $3m + n = 0$, de unde

$$\boxed{m = -1, n = 3}$$

(e) Coordonatele sunt $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, adică

$$\boxed{(3,2)}$$

(f) Centrul cercului va fi la mijlocul segmentului (AB), iar raza sa jumătate din $AB = \sqrt{(1-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$. Obţinem ecuaţia

$$\boxed{(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8}$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Ecuaţia este echivalentă cu $x + 2 = 2^2$, adică

$$\boxed{x = 2}$$

(b) Termenii sumei sunt 10 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Suma va fi $\frac{3+39}{2} \cdot 10$, adică

$$\boxed{210}$$

(c) Numerele cerute sunt $20, 50, 70, 52, 72$, în număr de

$$\boxed{5}$$

(d) Ecuaţia se scrie $\hat{4}x = \hat{2}$. Testăm succesiv elementele lui $\mathbb{Z}_6$. Avem

$$\hat{4} \cdot \hat{1} = \hat{4},\ \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{2},\ \hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{0},\ \hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{4},\ \hat{4} \cdot \hat{5} = \hat{2}$$

Soluţiile sunt

$$x \in \boxed{\{\hat{2}, \hat{5}\}}$$

(e) Deoarece $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$, rezultă $x = \frac{20}{10} = \boxed{2}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{\frac{2008x^{2007}}{x^{2008}+1}}$.

(b) Limita cerută este $f'(1) = \boxed{1004}$.

(c) $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\big|_0^1 = f(1) - f(0) = \boxed{\ln 2}$.

(d) Observăm că a este valoarea minimă a lui f. Căutăm punctele critice: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Studiem semnul derivatei: $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$ şi $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$. Rezultă că $x = 0$ este punct de minim. Deci $a = f(0) = \boxed{0}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot f(1)}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(1)}{2+\frac{3}{n}} = \frac{f(1)}{2} = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Notăm $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Atunci $G = \{X(a,b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Avem $I_2 = X(1,0) \in G$ şi $O_2 = X(0,0) \in G$.

(b) Fie $A, B \in G$. Există atunci $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

şi

$$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

Vrem să arătăm că $AB \in G$, adică există $a_3, b_3 \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

Dar

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_1a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}$$

Vom lua atunci

$$a_3 = a_1a_2 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}$$

$$b_3 = a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$$

(c) Vom lucra cu matricile de la punctul (b). Avem

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_1^2 + b_1^2 \\ \det(B) &= a_2^2 + b_2^2 \\ \det(AB) &= a_3^2 + b_3^2 \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} a_3^2 + b_3^2 &= (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + 2a_1b_2a_2b_1 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

(d) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$. Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0$. In acest caz $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^* = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Atunci $A^{-1} \in G$ dacă şi numai dacă $a^2 + b^2$ divide pe a şi pe b.

Dacă $a^2 + b^2 = 1$, atunci evident rezultă $A \in G$.

Reciproc, dacă $a^2 + b^2|a$ şi $a^2 + b^2|b$ atunci $(a^2 + b^2)^2|a^2$ şi $(a^2 + b^2)^2|b^2$ deci $(a^2 + b^2)^2|a^2 + b^2$, de unde rezultă că $a^2 + b^2 = 1$.

Obţinem $A^{-1} \in G \Leftrightarrow \det(A) = 1 \Leftrightarrow A^{-1} \in G_1$.

(e) Dacă $G_k \neq \emptyset$ atunci există $A \in G_k$. Rezultă $\det(A) = k$, de unde $\det(A^2) = k^2$, deci $G_{k^2} \neq \emptyset$.

(f) Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A) = 9$, deci $G_9 \neq \emptyset$.

(g) Presupunem că există $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$, astfel încât $\det(A) = 3$. Va rezulta că $a^2 + b^2 = 3$, adică suma a două numere naturale pătrate perfecte este 3, fapt imposibil.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \boxed{\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}$.

(b) Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

graficul funcţiei f are asimptota orizontală $\boxed{y=0}$ către ∞.

(c) Căutăm punctele critice: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2 = x^2+1$, deci f' nu se anulează pe $\mathbb{R}$. Fiind continuă, f' va avea semn constant pe $\mathbb{R}$. Cum $f'(0) = -1$, rezultă $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare.

(d)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x (\sqrt{t^2+1} - t)\,dt = \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt - \int_0^x t\,dt \\
&= J(x) - \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = J(x) - \frac{x^2}{2} \\
J(x) &= \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt = \int_0^x t'\sqrt{t^2+1}\,dt \\
&= t\sqrt{t^2+1}\Big|_0^x - \int_0^1 t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = x\sqrt{x^2+1} - \int_0^x \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \\
&= x\sqrt{t^2+1} - J(x) + \ln(x+\sqrt{x^2+1})
\end{aligned}$$

Deci

$$J(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)$$

Avem atunci

$$F(x) = \boxed{\tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) - \tfrac{x^2}{2}}$$

(e) Avem $F'(x) = f(x), \forall x \geq 0$. Conform (c) f este strict descrescătoare şi conform (b) limita lui f la ∞ este 0. Rezultă $f(x) > 0, \forall x \geq 0$. Deci $F'(x) > 0, \forall x \geq 0$, adică F este strict crescătoare. Rezultă $F(x) \geq F(0) = 0, \forall x \geq 0$.

(f) Calcul direct:

$$f(x)(f'(x)+1) + xf'(x) = (\sqrt{x^2+1} - x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 + 1\right) +$$

$$+x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = x - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x = 0$$

(g) **Rezolvăm ecuaţia pe intervalul** $[0,\infty)$.

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\log_2(2+x^2)$$

Avem

$$g'(x)=\frac{2x}{2+x^2}\cdot\frac{1}{\ln 2}>0,\forall x>0$$

Deci g este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.
Pe de altă parte f este strict descrescătoare.
Avem atunci $f(x)<f(0),\forall x>0$ şi $g(x)>g(0),\forall x>0$. Obţinem

$$g(x)>g(0)=1=f(0)>f(x),\forall x>0$$

Cum $f(0)=g(0)$, vom avea $x=0$ ca unică soluţie a ecuaţiei pe intervalul $[0,\infty)$.
Comentariu: Propunătorul acestui punct a exagerat cerând rezolvarea ecuaţiei pe $\mathbb{R}$. Demonstrarea faptului că ecuaţia nu admite rădăcini negative depăşeşte ca dificultate cadrul unui examen de bacalaureat. Iată totuşi şi această parte.
Rezolvarea ecuaţiei pe intervalul $(-\infty,0)$**.**

Notând cu $y=-x>0$, ecuaţia se scrie

$$\sqrt{y^2+1}+y-\log_2(y^2+2)=0\,.$$

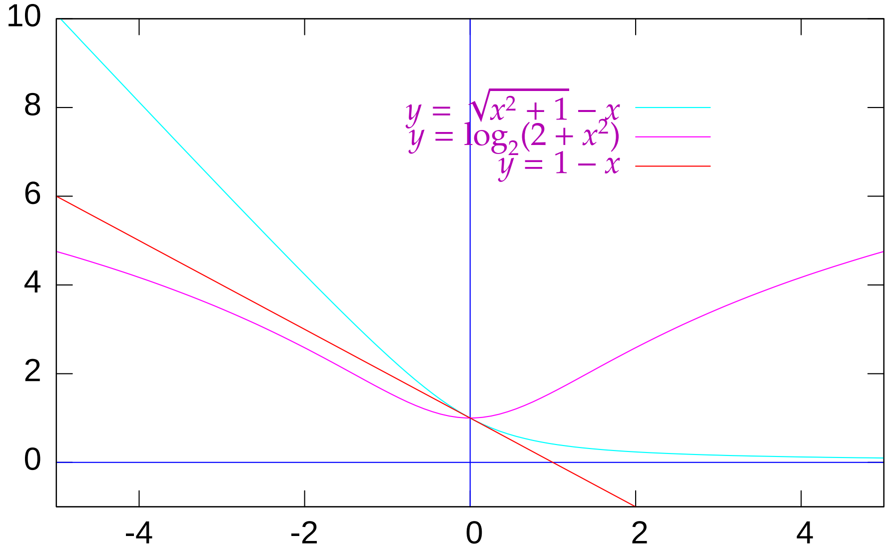
Cazul $0<y<1$. Vom folosi urmatoarea
Lemă: Pentru orice $y>0$ avem $\ln(1+y)<y$.

Aceasta este o inegalitate "clasică" şi poate fi demonstrată uşor studiind prima derivata a funcţiei $y\mapsto y-\ln(1+y)$.

Cu lema precedentă şi folosind faptul că $y^2<y,\forall y\in(0,1)$, avem $\log_2(2+y^2)<\log_2(2+y)=\log_2 2+\log_2(1+\frac{y}{2})=1+\dfrac{\ln(1+\frac{y}{2})}{\ln 2}<1+\dfrac{y}{2\ln 2}=1+\dfrac{y}{\ln 4}<1+y$. Atunci $\sqrt{y^2+1}+y-\log_2(y^2+2)>\sqrt{y^2+1}-1>0$ şi ecuatia nu are soluţii $y\in(0,1)$.
Cazul $y\geq 1$. Vom folosi
Lemă: Pentru orice $y\geq 1$ avem $2^y\geq 1+y$.

Această inegalitate mai puţin "clasică" se poate demonstra studiind prima derivată a funcţiei $y\mapsto 2^y-y$.

Ridicând la pătrat inegalitatea din lemă avem $2^{2y}\geq y^2+2y+1\geq y^2+3>y^2+2,\forall y\geq 1$. Logaritmând în baza 2, deducem $2y>\log_2(y^2+2),\forall y\geq 1$. Atunci $\sqrt{y^2+1}+y-\log_2(2+y^2)>2y-\log_2(2+y^2)>0,\forall y\geq 1$. Deci ecuaţia nu are rădăcini nici pentru $y\geq 1$.



Observaţie. Demonstraţia de mai sus poate fi adaptată la a arată că, de fapt,

$$\log_2(2+x^2) < x - 1 < \sqrt{x^2+1} - x, \quad \forall x \in (-\infty, 0)\,.$$