BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 27

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 27

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|OA| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \boxed{\sqrt{5}}$.

(b) O soluţie sistematică constă din următorii paşi.

- Mijlocul segmentului $[OA]$ este punctul de coordonate $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
- Panta dreptei OA este $m = \frac{2}{1} = 2$.
- Fiind perpendiculară pe dreapta OA, mediatoarea în cauză are panta $m' = -\frac{1}{2}$.
- Ecuaţia mediatoarei este

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{2x + 4y - 5 = 0}.$$

(c) Condiţia $|OA| = |OB|$ revine la $\sqrt{5} = \sqrt{1 + a^2}$, sau $1 + a^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a \in \{-2, 2\}$. Varianta $a = 2$ este eliminată prin ipoteză, deci $\boxed{a = -2}$.

(d) Raza cercului, calculată deja la punctul (a) este $r = \sqrt{5}$. Ecuaţia cercului centrat în O şi de rază $\sqrt{5}$ este $\boxed{x^2 + y^2 = 5}$.

(e) Avem

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5 \cdot i^6 \cdot i^7 = i^{1+2+3+4+5+6+7} = i^{28} = (i^4)^7 = \boxed{1}.$$

Am ţinut seama de formula $i^4 = (-1)^2 = 1$.

(f) $\operatorname{arctg}(\cos 0) = \operatorname{arctg} 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Din tabelul

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
2^n	1	2	4	8	16	32

se constată că inegalitatea $2^n \leq n^2$ este satisfăcută de către trei numere din şase, probabilitatea acestui eveniment fiind $p = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(b) Fie $r > 0$ raţia progresiei şi fie x al doilea termen. Seria aritmetică constă atunci din numerele $x - r$, x şi $x + r$. Prima condiţie revine la

$$(x - r) + x + (x + r) = 9 \iff 3x = 9 \iff x = 3\,.$$

Cea de a doua condiţie revine la

$$(3 - r) \cdot 3 \cdot (3 + r) = 15 \iff 9 - r^2 = 5 \iff r^2 = 4 \iff r = 2\,.$$

(soluţia negativă nu convine). Cele trei numere căutate sunt $\boxed{\{1, 3, 5\}}$.

(c) Condiţia iniţială de existenţă este $x > 0, x \neq 1$. Folosim proprietăţile de bază ale logaritmilor:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \forall a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}\,.$$

Atunci

$$\log_x 4 = 2 \iff \frac{1}{\log_4 x} = 2 \iff \log_4 x = \frac{1}{2} \iff \boxed{x = 4^{\frac{1}{2}} = 2}\,.$$

(d) Condiţiile iniţiale de existenţă sunt $x \geq 0$ şi $x + 2 \geq 0$, adică $x \geq 0$. Prin ridicare la pătrat obţinem $x + 2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x \in \{-1, 2\}$. Dintre aceste valori convine numai $\boxed{x = 2}$.

(e) Valoarea minimă a funcţiei de gradul II $f(x) = x^2 - 6x + 5$ este

$$\min f = f\left(\frac{6}{2}\right) = f(3) = \boxed{-4}\,.$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare. O formula echivalentă a expresiei lui f este

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x - 1} = \frac{x - 1 + 2}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}, \quad \forall x \in (1, \infty)\,.$$

Cu această ocazie, am răspuns şi la punctul (d).

(a) Pentru orice $x \in (1, \infty)$, avem $f'(x) = \boxed{-\frac{2}{(x - 1)^2}}$.

(b) Se vede direct din formula de mai sus că $f'(x) < 0$, $\forall x \in (1, \infty)$, deci f este strict descrescătoare pe întreg domeniul ei de definiţie.

(c) Deoarece $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x - 1}\right) = 1$, graficul lui f admite către ∞ asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 1}$.

(d) Am făcut deja această observaţie la începutul rezolvării.

(e) $\int_2^3 f(x)\, dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{2}{x - 1}\right) dx = (x + 2 \ln |x - 1|)\Big|_2^3 = \boxed{1 + 2 \ln 2}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare. Pentru $a, b \in \mathbb{Q}$ vom nota $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$.

(a) Într-adevăr, $I_2 = X(1,0) \in G$ deoarece $1^2 - 3 \cdot 0^2 = 1$.

(b) Fie $A = X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$ şi fie $B = X(c,d) = \begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix} \in G$. Atunci

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 3d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+3bd & ad+bc \\ 3(ad+bc) & ac+3bd \end{pmatrix}.$$

Mai mult, avem şi

$(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2 = a^2c^2+9b^2d^2-3a^2d^2-3b^2c^2 = (a^2-3b^2)(c^2-3d^2) = 1\cdot 1 = 1\,,$

deci $AB \in G$.

(c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$. Atunci $\det X = a \cdot a - 3b \cdot b = a^2 - 3b^2 = 1 \neq 0$, deci X este inversabilă în $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$.

(d) Continuând calculul început mai sus, dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$ atunci $\det X = 1$, deci

$$X^{-1} = X^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -3b & a \end{pmatrix}.$$

(e) Pentru numere diferite de trei, folosind numai programa de liceu, întrebarea este sinonimă cu căutatul acului în carul cu fân. Totuşi, în cazul de faţă, Mica Sirenă ne-a suflat exemplul

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in G.$$

(f) Presupunând că $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in G$, iar $a, b > 0$, este trivial de arătat că toate puterile matricii B **au toţi coeficienţii strict pozitivi**. În particular, dacă $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $B^n \neq I_2$ (matricea I_2 are doi coeficienţi nuli).

(g) Ideea decurge direct din propoziţiile demonstrate la cele două puncte precedente. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $A^n \neq I_2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că matricile

$$A, A^2, A^3, \ldots,$$

sunt două câte două distincte. ▼[detalii]

Presupunând prin absurd contrariul, dacă $A^n = A^m$, unde $n < m$, ţinând cont că matricea A este inversabilă, rezultă $A^{m-n} = I_2$, ceea ce contrazice propoziţia de la (f).

În plus, ele aparţin mulţimii G (conform punctului (b)), deci G are o infinitate de elemente.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \boxed{-\frac{x^2}{1+x^2}}.$$

(b) Funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ deoarece $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Funcţia g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ deoarece $g'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (punctul $x = 0$ în care g' nu ia o valoare negativă este punct izolat).

(d) O consecinţă directă a punctului precedent este că g este **injectivă**. Deoarece $g(0) = 0$, ecuaţia $g(x) = 0$ are soluţia unică $x = 0$.

(e) Am văzut că f este funcţie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Deoarece $a_0 = 1 > 0$ rezultă $a_1 = f(a_0) > f(0) = 0$. Această idee aplicată în mod repetat (inducţie!) conduce la inegalităţile

$$a_n > 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Dar g este funcţie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$g(a_n) < g(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(a_n) - a_n < \Leftrightarrow\; a_{n+1} = f(a_n) < a_n\,.$$

Deci şirul $(a_n)_n$ este într-adevăr strict descrescător şi mărginit.

(f) Este bine cunoscut faptul că graficul funcţiei arctangentă admite către ∞ asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = \frac{\pi}{2}}$.

(g) Folosim (din nou!) rezultatele de la punctele (b) şi (c). Deoarece $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, 1]$ rezultă

$$\int_0^1 f(x)\,dx > 0\,.$$

În al doilea rând, deoarece $g(x) < 0$, $\forall x \in (0, 1]$ rezultă

$$\int_0^1 g(x)\,dx < 0\,.$$

Dar $g(x) = f(x) - x\,, \forall x \in \mathbb{R}$, deci

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}\,.$$

Combinând aceste fapte, rezultă

$$0 < \int_0^1 f(x)\,dx < \frac{1}{2}\,,$$

q.e.d.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.