BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 21

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 21

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \boxed{13}$.

(b) $|AC| = \sqrt{(4-3)^2+(-5-4)^2} = \boxed{\sqrt{82}}$.

(c) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 1\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(d) Punctul P este pe cerc, deoarece $3^2+(-4)^2 = 25$. Prin dedublare, dreapta tangentă în P la cerc are ecuaţia

$$3x+(-4)y = 25 \iff \boxed{3x-4y-25=0}.$$

(e) Aplicând teorema cosinusului obţinem

$$|BC|^2 = |AB|^2+|AC|^2-2|AB|\cdot|AC|\cdot\cos\hat{A} = 4+4-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 8-4\sqrt{3},$$

aşadar $\boxed{|BC| = \sqrt{8-4\sqrt{3}}}$.

(f) Folosind formula lui de Moivre,

$$a+bi = (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^3 = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i.$$

Deci $\boxed{a=0, b=1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Observăm că în inelul $\mathbb{Z}_{12}$ avem $\hat{2}^4 = \widehat{16} = \hat{4} = \hat{2}^2$. De aici, se arată uşor faptul că $\hat{2}^n = \hat{2}^2$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ par. Rezultă $\hat{2}^{2007} = \hat{2}^{2006}\cdot\hat{2} = \hat{4}\cdot\hat{2} = \boxed{\hat{8}}$.

(b) În general $C_n^k = C_n^{n-k}$ pentru orice $n,k\in\mathbb{N}$ cu $k\le n$. În particular $C_{12}^3 - C_{12}^9 = \boxed{0}$.

(c) Folosim formula schimbării de bază. Atunci

$$\log_2 x = \log_4 x \iff \log_2 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \iff \log_2 x = \frac{\log_2 x}{2} \iff \log_2 x = 0 \iff \boxed{x=1}.$$

(d) $2^x = 4^x \iff 2^x = 2^{2x} \iff x = 4x \iff x = \boxed{0}$.

(e) Din tabelul

n	1	2	3	4	5
$n!$	1	2	6	24	120
n^3	1	8	27	64	125

se constată căinegalitatea $n! < n^3$ este satisfăcută de către 4 numere din cinci, probabilitatea acestui eveniment fiind $\boxed{p = \frac{4}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{3x^2 + 2}$.

(b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int (x^3 + 2x - 10)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 - 10x\right)\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{35}{4}}.$$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0) = \boxed{2}$.

(d) Folosind formula de la punctul (a), constatăm că $f'(x) = 3x^2 + 2 \geq 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este într-adevăr strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Scoţând în mod forţat factorul comun $\sqrt{n}$ atât la numitor cât şi la numărător, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n} + 3}{5\sqrt{n} - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}}{5 - \frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{2+0}{5-0} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Observăm direct faptul că

$$f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^3 + X^2 + X + 1) \cdot X + 1 = g \cdot X + 1,$$

deci câtul şi restul împărţirii lui f la g sunt polinoamele $\boxed{q = X}$ respectiv $\boxed{r = 1}$.

(b) $g(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = \boxed{0}$.

(c) Conform unei relaţii a lui Viète,

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

(d) Dezvoltând rezultatul de la punctul (b) (care ne indică rădăcina -1, obţinem

$$g = (X+1)(X^2+1).$$

Rădăcinile polinomului g sunt $\boxed{\{-1, i, -i\}}$.

(e) $y_1^{2007} + y_2^{2007} + y_3^{2007} = -1 + i^{2007} + (-i)^{2007} = -1 - i + i = \boxed{-1}$.

(f) Folosim împărţirea cu rest de la punctul (a). Atunci

$$0 = f(x_i) = g(x_i) \cdot x_i + 1 \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Rezultă

$$g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4) = \left(-\frac{1}{x_1}\right)\left(-\frac{1}{x_2}\right)\left(-\frac{1}{x_3}\right)\left(-\frac{1}{x_4}\right) = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

(g) Folosind (din nou!) împărţirea cu rest de la punctul (a), obţinem

$$f(y) = g(y) \cdot y + 1 = 0 \cdot y + 1 = 1,$$

pentru orice rădăcină y a polinomului g. Deci

$$f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(ax^2 + bx + c) + e^x(2ax + b) \\ &= \boxed{e^x\left(ax^2 + (b + 2a)x + c + b\right)} \\ f''(x) &= e^x\left(ax^2 + (b + 2a)x + c + b\right) + e^x(2ax + b + 2a) \\ &= \boxed{e^x\left(ax^2 + (b + 4a)x + c + 2b + 2a\right)}. \end{aligned}$$

(b) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(0) = e^0\left(-0^2 + (2n + 1) \cdot 0 + n^2\right) = \boxed{n^2}.$$

(c) Funcţia g_0 este definită prin expresia $g_0(x) = -e^x(x^2 - x)$. Atunci

$$g_0'(x) = -e^x(x^2 - x + 2x - 1) = -e^x(x^2 + x - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) Folosind formulele deduse la punctul (a), ecuaţiile $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ şi $f''(0) = 4$ sunt echivalente cu sistemul

$$\begin{cases} c & = 0 \\ c + b & = 1 \\ c + 2b + 2a & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} c & = 0 \\ b & = 1 \\ a & = 1 \end{cases}}.$$

(e) Pentru $n = 1$ identitatea revine la $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, trivial. Presupunând că identitatea este adevărată pentru un anumit n, obţinem

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + n + 6n + 6) \\
&= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{n+1}{6} \cdot (2n+3)(n+2) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},
\end{aligned}$$

deci propoziţia este adevărată şi pentru $n + 1$. Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Vom folosi identitatea de la punctul precedent. Cantitatea de sub limită este

$$\begin{aligned}
\frac{g_1(0) + g_2(0) + \ldots + g_n(0)}{n^3} &= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

deci valoarea limitei este, evident, $\frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

(g) Orice integrală de acest tip se calculează cu tehnica integrării prin părţi. Notăm cu $I = \int_0^1 g_0(x)\,dx$. Avem

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 e^x(-x^2 + x)\,dx = \left[e^x(-x^2 + x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x(-2x + 1)\,dx \\
&= \int_0^1 e^x(2x - 1)\,dx = [e^x(2x - 1)]\big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 2\,dx \\
&= e + 1 - 2e^x\Big|_0^1 = \boxed{3 - e}.
\end{aligned}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.