BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 1

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 1

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $2z - 2z^2 = 2(2-3i) - 2(2-3i)^2 = 4 - 6i - 2(4 - 12i - 9) = \boxed{14 + 18i}$.

(b) Cu formula distanţei dintre două puncte

$$|BC| = \sqrt{(2-5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \boxed{5}.$$

(c) Calculăm lungimile celorlalte două laturi

$$|AC| = \sqrt{(1-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$
$$|AB| = \sqrt{(1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Cum $|BC|^2 = 25 = 20 + 5 = |AC|^2 + |AB|^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul ABC este dreptunghic cu unghiul drept în A. Aria este $\frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = \boxed{5}$.

(d) Notăm cu h distanţa de la A la BC. Atunci aria triunghiului ABC poate fi exprimată de asemenea prin formula $\frac{|BC| \cdot h}{2}$. Obţinem ecuaţia $\frac{5 \cdot h}{2} = 5$, deci $h = \boxed{2}$.

(e) Coordonatele punctelor A şi C trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, deci obţinem sistemul

$$\begin{aligned} 1 + 3m + n &= 0 \\ 5 + m + n &= 0 \end{aligned}$$

Scăzând din prima ecuaţie pe cea de a doua, avem $2m - 4 = 0$, deci $\boxed{m = 2}$. Substituind (în oricare din ecuaţii doriţi) găsim $\boxed{n = -7}$.

(f) Cum triunghiul este dreptunghic, centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei BC. Coordonatele acestuia sunt

$$\left(\frac{2+5}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = \boxed{\left(\tfrac{7}{2}, 3\right)}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Ecuaţia se mai scrie $(3^2)^x = (3^3)^{x+1}$, sau $3^{2x} = 3^{3x+3}$. De aici $2x = 3x + 3$ şi obţinem $\boxed{x = -3}$.

(b) Observăm că primul termen al progresiei este $a_1 = 3$, iar raţia este $r = 9-3 = 6$. Atunci $a_{33} = a_1 + (33-1)r = 3 + 32 \cdot 6 = \boxed{195}$.

(c) Determinăm mai întâi $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ şi $C_5^1 = 5$ (în general $C_n^1 = n$). Atunci determinantul se scrie

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = \boxed{-3}.$$

(d) Determinăm pentru început $f(2007) = 2 \cdot 2007 - 2007 = 2007$. Atunci $f(f(2007)) = f(2007) = \boxed{2007}$.

(e) Ecuaţia se scrie $2x - 2 \cdot 2 + 3x - 5 = 6$, sau $5x = 15$, de unde $\boxed{x = 3}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > -1$, avem $f'(x) = \boxed{1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}}$.

(b) Aceasta este exact limita ce defineşte $f'(1) = \dfrac{1^2 + 2 \cdot 1}{(1+1)^2} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{3}{2} + \ln 2}$.

(d) Ecuaţia unei asimptote oblice la ∞ la graficul lui f este de forma $y = mx + n$, unde

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1 + \frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x} = 1 \\ n &= \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[x + 1 + \frac{1}{x+1} - x\right] = 1 \end{aligned}$$

Deci graficul lui f are asimptota $\boxed{y = x + 1}$ către ∞.

(e) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nf(n)}{n^2 + 2007} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n + \frac{n}{n+1}}{n^2 + 2007} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}}{1 + \frac{2007}{n^2}} = \boxed{1}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Elementele matricei formează mulţimea $\{1, 2, 3, 4\}$, deci matricea este în M.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = \boxed{-2}$

(c) Presupunem că există o matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ cu determinantul $ad - bc = 0$. Atunci $abcd = (ad)(bc) = (ad)^2$. Dar $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$, deci $abcd = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Am obţinut deci $(ad)^2 = 24$. Contradicţie, căci 24 nu este pătrat perfect.

(d) Conform b) determinantul este nenul, deci matricea are rangul maxim, adică $\boxed{2}$.

(e) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, deci $\det X = ad - bc$. Dar pentru $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$ se vede că

$$-10 = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \leq ab - cd \leq 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$$

(f) Presupunem că există $B \in M$ astfel ca $B^{-1} \in M$. Să observăm că orice matrice din M are determinantul număr întreg. Deci $\det B \in \mathbb{Z}$ şi $\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \in \mathbb{Z}$. Singurele numere întregi care au şi inversul întreg sunt ± 1. Dar determinantul matricelor din M nu poate lua decât valorile $\pm 2, \pm 5, \pm 10$. Într-adevăr nu putem avea decât următoarele posibilităţi:

$$\pm(3 \cdot 2 - 1 \cdot 4),\ \pm(4 \cdot 2 - 1 \cdot 3),\ \pm(3 \cdot 4 - 1 \cdot 2)$$

Contradicţie.

(g) Numărul de elemente în M este numărul de moduri în care putem aranja 4 elemente pe 4 poziţii, adică $A_4^4 = 4! = \boxed{24}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare. Este util să observăm că $f(x) = \ln x - \ln(x + 1)$ pentru orice $x > 0$.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $g(x) = f'(x) = (\ln x)' - (\ln(x+1))' = \boxed{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)}}$

(b) Deoarece $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = -\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2} < 0$, pentru orice $x > 0$, rezultă că g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(c) **Prima rezolvare.** Pentru $x > 0$, avem şi $x + 1 > 0$, deci $g(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} > 0$.

A doua rezolvare. Să observăm că $\lim\limits_{x \to \infty} g(t) = 0$. Cum g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$, rezultă că $g(x) > \lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$, pentru orice $x > 0$.

(d) Conform teoremei lui Lagrange aplicată funcţiei f pe intervalul $[n, n + 1]$, rezultă că există $c_n \in (n, n + 1)$ astfel ca

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) = g(c_n)$$

(e) Folosind rezultatul de la (d) avem $f(n+1) - f(n) = g(c_n)$ pentru o anumită valoare $c_n \in (n, n+1)$. Cum g este strict descrescătoare, din $n < c_n < n+1$, rezultă $g(n) > g(c_n) > g(n+1)$.

(f) Există o cale mai scurtă pentru a face demonstraţia, dar trebuie să-i facem plăcerea propunătorului (*poate altfel corectorii vă vor tăia puncte pentru acea soluţie mai scurtă*). Vom demonstra deci prin inducţie matematică propoziţia

$$P_n : \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Pentru $n = 1$, $P_1 : \quad \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ este evident verificată. Presupunem P_n adevărată. Atunci

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2},
\end{aligned}$$

adică P_{n+1} este adevărată. Conform principiului inducţiei matematice propozitiţia P_n este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Scriem succesiv partea stângă a inegalităţii de la (e) pentru $1, 2, 3, \ldots, n$ şi avem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cdot 3} &< f(2) - f(1) \\
\frac{1}{3\cdot 4} &< f(3) - f(2) \\
\ldots &< \ldots \\
\frac{1}{(n+1)(n+2)} &< f(n+1) - f(n)
\end{aligned}$$

Adunându-le obţinem

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) - \frac{1}{1\cdot 2} < f(n+1) - f(1)$$

Folosind identitatea de la (f) şi forma funcţiei f, inegalitatea precedentă devine

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} < \ln\frac{n+1}{n+2} - \ln\frac{1}{2}$$

sau după simplificări

$$\frac{n}{2(n+2)} < \ln\frac{2n+2}{n+1}$$

qed

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.