BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 15

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 15

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \boxed{2}$.

(b) $|AC| = \sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2} = \boxed{3\sqrt{2}}$.

(c) $\sin\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = \boxed{-1}$.

(d) Procedăm pe etape.

- Mediana cu pricina este segmentul AM, unde M este mijlocul segmentului BC.
- Coordonatele punctului M sunt $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (-1, 1)$.
- lungimea medianei AM este

$$|AM| = \sqrt{(-1-2)^2+(4-1)^2} = \boxed{3\sqrt{2}}.$$

(e) Lungimea laturii triunghiului echilateral de perimetru 12 este $l = 12/3 = 4$. Atunci aria triunghiului este

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{4\sqrt{3}}.$$

(f) Avem

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ+45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}. \end{aligned}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Din $\sqrt{1-x} = 2$, prin ridicare la pătrat, rezultă $1-x=4 \Leftrightarrow x = \boxed{-3}$. Soluţia găsită satisface condiţiile iniţiale de existenţă $x \in (-\infty, -1]$.

(b) Folosind prima relaţie a lui Viète,

$$x_1+x_2+x_3 = -\frac{0}{1} = \boxed{0}.$$

(c) $\log_5 x = \log_5(2x-1) \Leftrightarrow x = 2x-1 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$. Soluţia găsită satisface condiţia iniţială de existenţă $x \in (1/2, \infty)$.

(d) $2^{2x+1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2x+1 = 3x \Leftrightarrow x = \boxed{1}$.

(e) Deoarece $\log_2 n > 1 \Leftrightarrow n > 2$, notăm că 3 din cele 5 elemente ale mulţimii satisfac inegalitatea din enunţ, anume $n \in \{3,4,5\}$. Deci probabilitatea este $\boxed{p = \frac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{e^x - 1}$.

(b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int (e^x - x + 1)\,dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} + 1\right) - 1 = \boxed{e - \frac{1}{2}}.$$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0) = \boxed{0}$.

(d) Continuând calculul de la punctul (a), obţinem $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci f este într-adevăr convexă pe $\mathbb{R}$.

(e) Scoţând în mod forţat factorul comun n atât la numitor cât şi la numărător, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1+0}{1-0} = \boxed{1}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Deoarece $\det A = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = \boxed{0}$, avem $\operatorname{rang} A < 2$. Dar matricea A are cel puţin un element nenul, aşadar $\operatorname{rang} A = \boxed{1}$.

(b) Avem

$$AX = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2\\ 2x_1 + 4x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 0\\ 2x_1 + 4x_2 &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= -2t\\ x_2 &= t\end{cases}, t \in \mathbb{C}.$$

Deci matricele X căutate sunt de forma

$$X = \begin{pmatrix}-2t\\ t\end{pmatrix} = \boxed{t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{C}}.$$

(c) Ideea provine de la punctul precedent. Nu avem decât să formăm o matrice ale cărei coloane sunt soluţii ale ecuaţiei considerate mai sus. De exemplu, alegem $B = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$. Se verifică imediat că $AB = O_2$.

(d) Avem

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{O_2}.$$

(e) În general, o matrice U de tip 2×2 cu determinantul nul verifică identitatea $U^2 = tU$, unde $t \in \mathbb{R}$. Calculăm

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = 5A\,,$$

de unde $A^2 - 5A = O_2 \iff A(A - 5I_2) = O_2$. Putem alege deci

$$D = A - 5I_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

(f) Deoarece matricile A şi X comută, putem folosi formula binomului lui Newton. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$(A + X)^n = A^n + \underbrace{C_n^1 A^{n-1} X + C_n^2 A^{n-2} X^2 + \ldots + C_n^{n-1} A X^{n-1}}_{= O_2} + X^n = A^n + X^n\,.$$

(g) Fie $Y \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă. Presupunem prin absurd că $AY = O_2$. Înmulţind la dreapta cu matricea inversă Y^{-1}, obţinem

$$AY = O_2 \iff AYY^{-1} = O_2 \iff A = O_2\,,$$

contradicţie cu definiţia explicită a matricii A.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pe intervalul $(0, \infty)$ funcţia f este continuă, iar primitivele sale sunt

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^3}\,dx = \boxed{-\tfrac{1}{2x^2} + C}.$$

(b) Deoarece $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4} < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, funcţia f este strict descrescătoare pe întreg domeniul său de definiţie.

(c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^3} > 0\,,$$

deci şirul $(a_n)_n$ este strict crescător.

(d) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, asimptota către ∞ la graficul lui f este dreapta orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 0}$.

(e) Fie $k > 0$. Funcţia $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$ este o primitivă a funcţiei f. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $(k, k+1)$. Există deci $c \in (k, k+1)$ estfel încât

$$F(k+1) - F(k) = f(c) \iff -\frac{1}{2(k+1)^2} - \left(-\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{1}{c^3} > \frac{1}{(k+1)^3},$$

q.e.d.

(f) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} < 0\,.$$

Am aplicat la final inegalitatea demonstrată la punctul (e).

(g) Deoarece şirul $(a_n)_n$ este strict crescător, rezultă imediat că $a_n \geq a_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, inegalitatea $a_n < b_n$, împreună cu rezultatele obţinute la (c) şi (f) implică

$$a_1 < a_2 < \ldots < \ldots b_2 < b_1\,.$$

În particular $a_n < b_3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rămâne doar să calculăm

$$b_3 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{18} = \frac{263}{216} = 1,21759\ldots\,.$$

Problema este rezolvată.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.