BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 11

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 11

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $\sin 30^\circ + \sin 150^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$.

(b) Aria triunghiului echilateral de latură $l = 2\sqrt{3}$ este

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{3\sqrt{3}}.$$

(c) Coordonatele (x, y) ale punctului de intersecţie al celor două drepte satisface sistemul

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (-2) - y + 5 = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}}$$

(d) Folosind formula obişnuită, găsim că

$$\mathbf{d} = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt{5}}}.$$

(e) Ecuaţia standard al cercului din enunţ este $x^2 + y^2 = 3^2$, deci raza sa este $\boxed{r = 3}$.

(f) Deoarece $\frac{4^2}{3}2 + \frac{2^2}{8} = 1$, punctul $M(4, 2)$ este situat pe elipsă. Prin dedublare, ecuaţia tangentei la elipsă în acest punct este

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x + 2y - 8 = 0}.$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Deoarece mulţimea A are 10 elemente, numărul tuturor submulţimilor ei este $\boxed{2^{10} = 1024}$.

(b) Mulţimea A are $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \boxed{120}$ de submulţimi cu trei elemente.

(c) O submulţime $B \subset A$ conţine elementul doi dacă şi numai dacă $B = \{2\} \cup C$, unde C este o submulţime oarecare a mulţimii cu nouă elemente

$$C \subset \{4, 6, 8, \ldots, 20\}.$$

Numărul căutat coincide aşadar cu numărul tuturor submulţimilor mulţimii de mai sus, adică $\boxed{2^9 = 512}$.

(d) Mulţimea A are exact 2 elemente divizibile cu 10, anume 10 şi 20. Probabilitatea cerută este $p = \dfrac{2}{10} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$.

(e) Elementele mulţimii A constă din termenii consecutivi ai progresiei aritmetice de raţie 2 ce are primul termen egal cu 2 resectiv ultimul termen egal cu 20. Suma lor este

$$\frac{2+20}{2} \cdot 10 = \boxed{110}.$$

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \boxed{-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 0}$.

(c) Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$, deci nu are asimptote verticale. Deoarece este f funcţie pară, avem

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Prin urmare dreapta $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală la graficul lui f atât către ∞ cât şi către $-\infty$.

(d) Fiind cât de numere strict pozitive, e clar că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pe de altă parte, deoarece numitorul verifică $x^2 + 1 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ avem şi $f(x) \leq \frac{1}{1} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(e) Avem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

4. Subiectul III

Rezolvare.

(a) Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}}.$$

(b) Conform relaţiilor lui Viète,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -\frac{-(a+d)}{1} = a + d \\ z_1 z_2 &= \frac{ad - bc}{1} = ad - bc\,. \end{aligned}$$

(c) Într-adevăr,

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)A - z_1 z_2 I_2 &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + ad - ad + bc & ad + db \\ ac + dc & ad + d^2 - ad + bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = A^2\,. \end{aligned}$$

(d) Verificăm prin calcul direct:

$$\begin{aligned} z_1 X + z_2 Y &= \frac{z_1}{z_1 - z_2}(A - z_2 I_2) - \frac{z_2}{z_1 - z_2}(A - z_1 I_2) \\ &= \frac{1}{z_1 - z_2}(z_1 A - z_1 z_2 I_2 - z_2 A + z_1 z_2 I_2) \\ &= \frac{1}{z_1 - z_2}(z_1 - z_2)A = A\,. \end{aligned}$$

(e) Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Prin înmulţire cu A^k în identtatea de la punctul (c) obţinem

$$A^{k+2} = (z_1 + z_2)A^{k+1} - z_1 z_2 A^k\,,$$

q.e.d.

(f) Deşi enunţul ne cere în mod imerativ să folosim inducţia, această metodă este o pierdere de vreme, mai ales în contextul subpunctelor rezolvate mai sus. Să observăm că $YX = XY$, mai mult,

$$YX = XY = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}(A^2 - (z_1 + z_2)A + z_1 z_2 I_2) = O_2\,,$$

consecinţă directă a identităţii de la (c).
Fie acum $n \in \mathbb{N}^*$. Ridicând la puterea n identitatea de la (d) şi folosind binomul lui Newton, rezultă

$$\begin{aligned} A^n &= (z_1 X + z_2 Y)^n = (z_1 X)^n + (z_2 Y)^n \\ &= z_1 X^n + z_2 Y^n\,, \end{aligned}$$

Ideea crucială a fost că, dezvoltând cu binomul lui Newton, orice monom care are printre termeni câte o putere strict pozitivă a matricilor X şi Y este egal cu matricea nulă O_2. Pentru a încheia demonstraţia, mai calculăm

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}(A^2 - 2z_2 A + z_2^2 I_2) = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}((z_1 + z_2)A - z_1 z_2 I_2 - 2z_2 A + z_2^2 I_2) \\ &= \frac{1}{(z_1 - z_2)^2}(z_1 - z_2)(A - z_2 I_2) = X\,. \end{aligned}$$

În mod analog obţinem şi $Y^2 = Y$ (matricile X şi Y se numesc *proiectori*). În fine, continuând calculul început mai sus,

$$A^n = z_1^n X^n + z_2^n Y^n = z_1^n X + z_2^n Y\,.$$

(g) Subsituind valorile provenite din matricea B în toate rezultatele de mai sus, găsim:
- $f = X^2 - 10X + 21$.
- $z_1 = 3$ şi $z_2 = 7$.
- $X = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ respectiv $Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.

În concluzie,

$$B^n = 3^n X + 7^n Y = \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5\cdot 3^n - 7^n & -3^n + 7^n \\ 5\cdot 3^n - 5\cdot 7^n & -3^n + 5\cdot 7^n \end{pmatrix}}\,.$$

5. Subiectul IV

Rezolvare. În funcţie de context, vom folosi o formulă echivalentă a expresiei funcţiei f:

$$f(x) = 2 - \frac{2}{1+x}\,, \quad \forall x \in [0,\infty)\,.$$

(a) $\boxed{f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}}$, $\forall x \in [0,\infty)$.

(b) Deoarece se vede că $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in [0,\infty)$ rezultă că f este strict crescătoare pe întreg domeniul ei de definiţie.

(c) Evident, $f(0) = 0$. Fie $x > 0$ arbitrar. Atunci

$$\begin{aligned} f(x) \le \sqrt{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1+x} \le \sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \le 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x} \le 1 + x \;\Leftrightarrow\; 0 \le 1 - 2\sqrt{x} + x \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \le (1 - \sqrt{x})^2\,, \end{aligned}$$

evident.

(d) Integrând inegalitatea de la punctul precedent şi ţinând cont de monotonia integralei, obţinem

$$\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

(e) $\boxed{a_1 = 2}$, $\boxed{a_2 = f(2) = \frac{4}{3}}$, $\boxed{a_3 = f(4/3) = \frac{8}{7}}$ şi $\boxed{a_4 = f(8/7) = \frac{16}{15}}$.

(g) În contextul acestei probleme, este avantajos să răspundem mai întâi la acest punct. Propoziţia din enunţ a fost verificată mai sus pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Presupunând că $a_n = \dfrac{2^n}{2^n - 1}$ rezultă

$$a_{n+1} = f(a_n) = \frac{2a_n}{1 + a_n} = \frac{2 \cdot \frac{2^n}{2^n-1}}{1 + \frac{2^n}{2^n-1}} = \frac{2^{n+1}}{2^n - 1 + 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1},$$

deci propoziţia devine adevărată şi pentru $n+1$. Conform principiului inducţiei rezultă că propoziţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Se vede direct că şirul de termen general

$$a_n = \frac{2^n}{2^n - 1} = 1 + \frac{1}{2^n - 1}$$

este strict descrescător.

Observaţie. Putem demonstra că şirul este descrescător **în ipoteza** $a_1 \geq 1$ fără a-i calcula termenul general (de altfel, dacă alegem $a_1 \neq 2$ şirul definit prin aceeaşi relaţie de recurenţă nu mai poate fi "calculat" în mod explicit). Introducem funcţia $g(x) = f(x) - x$. Deoarece $g'(x) = \frac{2}{(1+x)^2} - 1 < \frac{2}{4} - 1 < 0$, $\forall x \geq 1$, rezultă că funcţia g este strict descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$. Deci

$$g(x) < g(1) = 0, \quad \forall x \in (1, \infty)$$

Cu alte cuvinte cobinând aici şi rezultatul de la (b), avem

$$1 = f(1) < f(x) < x, \quad \forall x \in (1, \infty).$$

Prin urmare, $1 < f(a_1) = a_2 < a_1$ şi (procedând eventual prin inducţie),

$$1 < f(a_n) = a_{n+1} < a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.